

(Prøve)eksamen i Lineær Algebra

Maj 2016

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 10 nummererede sider med ialt 16 multiple-choice opgaver. Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der må **ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

Opgave 1 (7%)

Lad

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ og } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Afkryds for hvert af følgende tre spørgsmål det rigtige svar:

a. Dimensionen af W er lig

- 0 1 2 3 4

b. Dimensionen af W^\perp er lig

- 0 1 2 3 4

c. Rangnen af A er lig

- 0 1 2 3 4

Opgave 2 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a. Værdien af indgang $(1,3)$ i A^{-1} , dvs. $(A^{-1})_{13}$, er:

- 0 1 1/3 1/4 1/5

b. Værdien af $\det(A^{-1})$ er

- 0 -1 -1/3 -1/4 1/5

Opgave 3 (5%)

Lad R være den reducerede række-echelonform af matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestem værdien af R_{24} :

- 0 $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ 2 $-\frac{3}{8}$

Opgave 4 (10%).

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlig*e sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> A er ikke-inverterbar. | <input type="checkbox"/> Tallet 0 er egen værdi for A . |
| <input type="checkbox"/> Den lineære transformation induceret af A er injektiv (engelsk: one-to-one). | <input type="checkbox"/> A er på reduceret række-echelonform (reduceret trappeform). |
| <input type="checkbox"/> A er på række-echelonform (trappeform). | <input type="checkbox"/> Der findes et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$, således at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke er konsistent |
| <input type="checkbox"/> nullity $A = 1$. | <input type="checkbox"/> $\det A = 0$. |
| <input type="checkbox"/> rank $A = 3$. | |
| <input type="checkbox"/> nullity $A + \text{rank } A = 6$. | |

Opgave 5 (8%)

Der er givet to 3×3 -matricer A og B . Det oplyses, at $\det A = -3$ samt at B er en ortogonal matrix med $\det(B) > 0$. Besvar nedenstående spørgsmål baseret på disse oplysninger:

a. Bestem værdien af: $\det B$

- 0 -2 1 2

b. Bestem værdien af: $\det(AB)$

- 2 2 -3 0

c. Bestem værdien af: $\det(-A)$

- 1 -3 1/2 3

Opgave 6 (7%).

Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

a. Lad W være et underrum af \mathbf{R}^6 med dimension 4. Så er $\dim(W^\perp) = 2$.

- Sand Falsk

b. Der findes en lineær transformation $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ som er surjektiv (engelsk: onto).

- Sand Falsk

c. Hvis Q er en 4×4 ortogonal matrix, da er Q^5 ligeledes en ortogonal matrix.

- Sand Falsk

d. En 3×3 matrix A med egenverdierne 1, 2 og -3 er *både* inverterbar og diagonaliserbar.

- Sand Falsk

Opgave 7 (5%)

Hvilke af følgende udsagn er sande (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning):

- Enhver ortonormal mængde i \mathbf{R}^n er en basis for \mathbf{R}^n , $n > 1$.
- Vektorerne i en ortonormal mængde i \mathbf{R}^n er lineært uafhængige
- Vektorerne i en ortonormal mængde i \mathbf{R}^n udspænder \mathbf{R}^n
- Antallet af vektorer i en ortonormal mængde i \mathbf{R}^n er højst n .

Opgave 8 (5%)

Betragt matricen C givet ved

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Værdien af $\det(C)$ er:

- 2 -3 0 4 -2/5

Opgave 9 (5%)

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende 2 sand/falsk opgaver:

i. Vektoren \mathbf{b} ligger i $\text{Col}(A)$.

Sand

Falsk

ii. Vektoren \mathbf{b} ligger i $\text{Nul}(A)$.

Sand

Falsk

Opgave 10 (5%)

Der er givet følgende basis

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

for \mathbf{R}^3 . Benævn $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ og betragt vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende 2 spørgsmål:

i. \mathcal{B} er en ortonormal basis for \mathbf{R}^3 .

Sand

Falsk

ii. Tredie komponent (3. indgang) af koordinatvektoren $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ er givet ved:

$-\sqrt{2}$

3

$\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Opgave 11 (8%)

Det oplyses, at den reducerede trappeform af matricen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

er givet ved

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende fire spørgsmål om A :

a. Antallet af pivoter i A er:

- 1 2 3 4 5 6

b. Antallet af frie variable i ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er:

- 1 2 3 4 5 6

c. Lad T være den lineær transformation $T : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^d$ givet ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Tallet d er her givet ved:

- 1 2 3 4 5 6

d. Den lineære transformation $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^6$, er surjektiv (engelsk: onto).

- Sand Falsk

Opgave 12 (5%)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Ovenstående ligningssystem har (sæt kun ét kryds):

- Ingen løsning
- Uendelig mange løsninger
- En entydig bestemt løsning
- Ingen af ovenstående svar er korrekte.

Opgave 13 (5%)

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvilket af følgende udsagn er korrekt (sæt kun ét kryds):

- A 's søjler er lineært afhængige
- $\det(A) = 1$
- A er ikke inverterbar
- Ingen af ovenstående mulige svar er korrekte.

Opgave 14 (7%)

Antallet af lineært uafhængige egenvektorer for matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

er:

- 0 1 2 3 4 5

Opgave 15 (5%)

Betragt produktet AB af matricerne

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Værdien af indgang $(2,4)$ i AB , dvs. $(AB)_{24}$, er:

- 2 -12 21 -22 -13/12

Opgave 16 (5%)

I MATLABs Command Window er der indtastet følgende kommandoer:

```
>> A = [1 2 3 4; 1 3 5 7; 2 4 6 8]'; % bemærk apostrof
```

```
>> v = [1; 2; 3; 4];
```

```
>> T = [A v]
```

Hvad er resultatet af den sidste kommando?

- T er en 3×4 matrix
- T er en 3×5 matrix
- T er en 4×4 matrix
- T er en 5×3 matrix
- MATLAB giver en fejlmeddelelse: "Dimensions of matrices being concatenated are not consistent"