(Prøve)eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt bestaår af 9 nummererede sider med ialt 15 opgaver. Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der må **ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder ”essay-opgaver”. I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder ”multiple choice” opgaver. Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.

NAVN: ______________________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________________

Del I ("Essay-opgaver")

Opgave 1 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A.
2. Find en basis for nulrummet hørende til A.
3. Find en basis for rækkerummet hørende til A.

Opgave 2 (12%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenværdierne for A.
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum.
3. Afgør, om A er diagonaliserbar. Find i så fald matricer P og D, så D er diagonal, P er invertibel (regulær) og $A = PDP^{-1}$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 3 (5%)

Lad R være den reducerede række-echelonform af matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestem værdien af R_{24}:

☐ 0 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 2 ☐ $-\frac{3}{8}$

Opgave 4 (10%).

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlige* sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

☐ A er ikke-inverterbar.
☐ Den lineære transformation induceret af A er injektiv (engelsk: one-to-one).
☐ A er på række-echelonform (trappeform).
☐ nullity $A = 1$.
☐ rank $A = 3$.
☐ nullity A + rank $A = 6$.
☐ Tallet 0 er egenværdi for A.
☐ A er på reduceret række-echelonform (reduceret trappeform).
☐ Der findes et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$, således at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke er konsistent
☐ $\det A = 0$.

Opgave 5 (8%)

Der er givet to 3×3-matricer A og B. Det oplyses, at $\det A = -3$ samt at B er en ortogonal matrix med $\det(B) > 0$. Besvar nedenstående spørgsmål baseret på disse oplysninger:

a. Bestem værdien af: $\det B$

☐ 0 ☐ -2 ☐ 1 ☐ 2

b. Bestem værdien af: $\det(AB)$

☐ -2 ☐ 2 ☐ -3 ☐ 0

c. Bestem værdien af: $\det(-A)$

☐ 1 ☐ -3 ☐ 1/2 ☐ 3

Opgave 6 (7%).

Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

a. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^6$ med dimension 4. Så er $\dim(W^\perp) = 2$.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Der findes en lineær transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ som er surjektiv (engelsk: onto).

☐ Sand ☐ Falsk

c. Hvis Q er en 4×4 ortogonal matrix, da er Q^5 ligeledes en ortogonal matrix.

☐ Sand ☐ Falsk

d. En 3×3 matrix A med egenværdierne $1, 2$ og -3 er *både* inverterbar og diagonaliserbar.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 7 (5%)

Hvilke af følgende udsagn er sande (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning):

☐ Enhver ortonormal mængde i $\mathbf{R}^n$ er en basis for $\mathbf{R}^n$, $n > 1$.
☐ Vektorerne i en ortonormal mængde i $\mathbf{R}^n$ er lineært uafhængige
☐ Vektorerne i en ortonormal mængde i $\mathbf{R}^n$ udspænder $\mathbf{R}^n$
☐ Antallet af vektorer i en ortonormal mængde i $\mathbf{R}^n$ er højst n.

Opgave 8 (5%)

Betragt matricen C givet ved

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Værdien af $\det(C)$ er:

☐ 2 ☐ -3 ☐ 0 ☐ 4 ☐ -2/5

Opgave 9 (5%)

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende 2 sand/falsk opgaver:

i. Vektoren $\mathbf{b}$ ligger i $\mathrm{Col}(A)$.

☐ Sand ☐ Falsk

ii. Vektoren $\mathbf{b}$ ligger i $\mathrm{Nul}(A)$.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 10 (5%)

Der er givet følgende basis

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

for $\mathbf{R}^3$. Benævn $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ og betragt vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende 2 spørgsmål:

i. $\mathcal{B}$ er en ortonormal basis for $\mathbf{R}^3$.

☐ Sand ☐ Falsk

ii. Tredie komponent (3. indgang) af koordinatvektoren $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ er givet ved:

☐ $-\sqrt{2}$ ☐ 3 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Opgave 11 (8%)

Det oplyses, at den reducerede trappeform af matricen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

er givet ved

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende fire spørgsmål om A:

a. Antallet af pivoter i A er:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

b. Antallet af frie variable i ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

c. Lad T være den lineær transformation $T : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^d$ givet ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Tallet d er her givet ved:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

d. Den lineære transformation $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^6$, er surjektiv (engelsk: onto).

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 12 (5%)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 \qquad = 4 \end{cases}$$

Ovenstående ligningssystem har (sæt kun ét kryds):

- ☐ Ingen løsning
- ☐ Uendelig mange løsninger
- ☐ En entydig bestemt løsning
- ☐ Ingen af ovenstående svar er korrekte.

Opgave 13 (5%)

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvilket af følgende udsagn er korrekt (sæt kun ét kryds):

- ☐ A's søjler er lineært afhængige
- ☐ $\det(A) = 1$
- ☐ A er ikke inverterbar
- ☐ Ingen af ovenstående mulige svar er korrekte.

Opgave 14 (7%)

Antallet af lineært uafhængige egenvektorer for matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

er:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Opgave 15 (5%)

Betragt produktet AB af matricerne

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Værdien af indgang $(2,4)$ i AB, dvs. $(AB)_{24}$, er:

☐ 2 ☐ -12 ☐ 21 ☐ -22 ☐ -13/12