To find the English version of the exam, please read from the other end

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Onsdag den 17. februar, 2016. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 9 nummererede sider med ialt 15 opgaver. Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der må **ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "essay-opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.

NAVN: ________________________________

STUDIENUMMMER: ________________________________

HOLDNUMMER:

- ☐ Aalborg HOLD 1 (v. Lisbeth Fajstrup)
- ☐ Aalborg HOLD 2 (v. Jacob Broe)
- ☐ Aalborg HOLD 3 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)
- ☐ Aalborg Robotics (v. Diego Ruano)
- ☐ AAU-Cph, Dansk hold (v. Iver Ottosen)
- ☐ AAU-Cph, Engelsk hold (v. Bedia Møller)

Del I (”Essay-opgaver”)

Opgave 1 (10%).

Lad
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A.
2. Find en basis for nulrummet hørende til A.
3. Find en basis for rækkerummet hørende til A.

Opgave 2 (10%).

Lad
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenværdierne for A.
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum.
3. Afgør, om A er diagonaliserbar. Find i så fald matricer P og D, så D er diagonal, P er invertibel (regulær) og $A = PDP^{-1}$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 3 (5%)

Lad R være den reducerede trappeform af matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestem værdien af R_{13}:

☐ $-\frac{1}{6}$ ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2

Opgave 4 (10%).

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlige* sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning):

☐ A er inverterbar (regulær).
☐ Den lineære transformation $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^5$, er surjektiv (engelsk: onto).
☐ A er på række-echelonform (trappeform).
☐ nullity $A = 1$.
☐ rank $A = 4$.
☐ nullity A + rank $A = 5$.
☐ Tallet -2 er egenværdi for A.
☐ A kan diagonaliseres.
☐ Der findes et $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^5$ med $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, således at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
☐ det $A = 24$.

Opgave 5 (7%)

Der er givet to 4×4-matricer A og B. Det oplyses, at $\det A = -3$ og $\det B = 2$. Besvar nedenstående spørgsmål baseret på disse oplysninger:

a. Rangen af matricen AB er

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

b. Værdien af $\det(AB^2)$ er

☐ -12 ☐ -6 ☐ 6 ☐ 12 ☐ 14

c. Værdien af $\det(B^{-1}AB)$ er

☐ -3 ☐ -2 ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1

Opgave 6 (8%).

Lad A og B være $n \times n$ inverterbare (regulære) matricer. Lad I_n være identitetsmatricen (enhedsmatricen) af størrelse $n \times n$.

Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

a. Der gælder, at $\det(AB) = 0$.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Der gælder, at $((AB)^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top(B^{-1})^\top$.

☐ Sand ☐ Falsk

c. Der gælder, at $A^{-1}B^{-1}(AB) = I_n$.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Der gælder, at $B(AB)^{-1} = A^{-1}$.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 7 (5%)

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lad T_A benævne den lineære transformation $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ frembragt af A, og lad tilsvarende T_B og T_{BA} benævne de lineære transformationer frembragt af henholdsvis B og BA.

Besvar følgende tre sand/falsk opgaver:

a. Der gælder, at $T_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Der gælder, at $T_B : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$.

☐ Sand ☐ Falsk

c. Der gælder, at $T_{BA} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 8 (5%)

Betragt matricen C givet ved

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinanten af C er lig

☐ 0 ☐ -3 ☐ 2 ☐ 5 ☐ -2/3

Opgave 9 (5%)

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende 2 sand/falsk opgaver:

i. Vektoren $\mathbf{b}$ ligger i Col A.

☐ Sand ☐ Falsk

ii. Vektoren $\mathbf{b}$ ligger i Null A.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 10 (5%)

Følgende basis

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

er givet for $\mathbf{R}^3$. Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

Besvar følgende 3 spørgsmål:

i. Der gælder, at $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ er ortogonale.

☐ Sand ☐ Falsk

ii. Der gælder, at $\mathbf{b}_2$ og $\mathbf{b}_3$ er ortogonale.

☐ Sand ☐ Falsk

iii. $\mathcal{B}$ er en orthonormal basis for $\mathbf{R}^3$.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 11 (8%)

Det oplyses, at matricen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

er række-ækvivalent med

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende fire spørgsmål om A:

a. Rangen af A er:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

b. Givet $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^6$, så har ligningsystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ altid en løsning.

☐ Sand ☐ Falsk

c. nullity A er:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

d. Den lineære transformation $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$, er injektiv (engelsk: one-to-one).

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 12 (5%)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{cases} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ \quad 3x_1 + 5x_2 \qquad = 1 \end{cases}$$

Netop ét af følgende udsagn om dette ligningssystem er korrekt. Marker det korrekte udsagn:

- ☐ Ligningssystemet har ingen løsninger
- ☐ Ligningssystemet har uendelig mange løsninger
- ☐ Ligningssystemet har en entydig bestemt løsning
- ☐ Ingen af ovenstående svar er korrekte.

Opgave 13 (5%)

Lad $a \in \mathbf{R}$ og betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & -a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Hvilke af følgende udsagn er korrekte (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning):

- ☐ Værdien af a kan vælges således at søjlerne i A er lineært uafhængige.
- ☐ Søjlerne i A er lineært afhængige uanset værdien af a.
- ☐ A er inverterbar (regulær) for $a \geq 0$.
- ☐ $\det(A) \leq 0$.

Opgave 14 (7%)

Det maksimale antal af lineært uafhængige egenvektorer for matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

er

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Opgave 15 (5%)

Betragt matricerne A og B givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende to spørgsmål om matrixprodukerne AB og BA.

a. Værdien af indgang $(2,3)$ i AB, dvs. $(AB)_{23}$, er lig

☐ -9 ☐ -5 ☐ 1 ☐ -4 ☐ 2

b. Værdien af indgang $(2,3)$ i BA, dvs. $(BA)_{23}$, er lig

☐ -9 ☐ -5 ☐ 1 ☐ -4 ☐ 2