Facit

To find the English version of the exam, please read from the other end

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet & Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

11. februar, 2015. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver. Printet to-sidet.

Der må gøres brug af bøger, noter, fotokopier mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn samt studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne. På hver side af besvarelsen skal både sidetallet og det samlede antal sider fremgå**. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLDNUMMER:

- ☐ Aalborg HOLD 1 (v. Lisbeth Fajstrup).
- ☐ Aalborg HOLD 2 (v. Olav Geil).
- ☐ Aalborg HOLD 3 (v. Leif Kjær Jørgensen).
- ☐ Aalborg HOLD 4 (v. Morten Nielsen).
- ☐ Aalborg HOLD 5 (v. Jacob Broe).
- ☐ Aalborg HOLD 6 (v. Diego Ruano).
- ☐ AAU-Cph, Dansk hold (v. Iver Ottosen).
- ☐ Esbjerg, Dansk hold (v. Ulla Tradsborg).

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 7 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Find samtlige løsninger til ligningssystemet $Ax = \mathbf{b}$.
2. Find den reducerede trappeform (den reducerede echelonform) for A.

Opgave 2 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 2\sqrt{5} & 3\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{3}{10} & 1 \end{bmatrix}$$

Afgør og begrund i hvert af følgende tilfælde, om udtrykket giver mening. For hvert udtryk, der giver mening, beregn værdien.

1. AB^T ÷ 2. $A\mathbf{c}$ $= \begin{bmatrix} 10 \\ 28 \end{bmatrix}$ 3. $B^T D$ $= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 4. $D^T A$ ÷

Opgave 3 (8%).

Lad $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær transformation, som er givet ved

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Opskriv standardmatricen for T.
2. Find standardmatricen for den inverse lineære transformation T^{-1}.

Matricen for T $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ for T^{-1} $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Opgave 4 (7%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricen R er den reducerede trappeform (den reducerede echelonform) for A. (Det skal man ikke vise i opgaven.)

1. Find en basis for nulrummet hørende til A. $\left\{ \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix} \right\}$
2. Find en basis for søjlerummet hørende til A.

$\sim \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$

Opgave 5 (9%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Find egenværdierne for A. $\lambda = 3$ og $\lambda = -3$
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum. For $\lambda = 3$ $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\}$, $\lambda = -3$: $\left\{ \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right.$
3. Afgør, om A er diagonaliserbar. Find i så fald matricer P og D, så D er diagonal, P er invertibel (regulær) og $A = PDP^{-1}$.

$P = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}$ eller $P = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$

Opgave 6 (9%).

Underrummet W af $\mathbb{R}^4$ har basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$$

1. Bestem en ortogonal basis for W ved hjælp af Gram Schmidt processen. $\left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}} \right.$
2. Bestem herefter en ortonormal basis for W. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} v_1, v_2, v_3 \right\}$
3. Bestem en basis for $W^{\perp}$.

$\left\{ \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$

Opgave 7 (8%).

Her ser vi på isometrier fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$. Matricerne A og B er som følger:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

og B er standardmatricen for en rotation på 90° mod uret.

1. Opskriv B. $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. Afgør, om A er matricen for en spejling eller en rotation. A er spejling (i $y=x$)
3. Udregn AB og afgør, om det er matricen for en spejling eller en rotation.

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ AB er spejling (i x-aksen)

Opgave 8 (10%).

Lad

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

1. Vis, at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{B}$ er ikke en basis da $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
2. Vektoren $\mathbf{u}$ er givet ved $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{u}$. $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$
3. En lineær operator T er bestemt ved, at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \; T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bestem $[T]_{\mathcal{B}}$.

$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Der er givet fuldt point til studerende, der har 1 rigtigt og argumenterer for, at 2,3 ikke giver mening når $\mathcal{B}$ ikke er en basis.
Der er også fuldt point for at svare rigtigt i 1 og dernæst regne 2 og 3 som om $\mathcal{B}$ er en basis.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (6%).

Matricerne A, B og C er 3×3.
Desuden ved vi: A er ikke invertibel (ikke regulær), $\det(B) = 2$ og $\det(C) = 3$.
Afkryds for hvert af følgende tre spørgsmål det rigtige svar:

$\det(ABC)$ er

☒ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

$\det(B^3)$ er

☐ 2 ☐ -2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 8 ☐ 16

$\det(C^T B)$ er

☐ $\frac{2}{3}$ ☐ 2 ☐ 3 ☒ 6 ☐ 5 ☐ $\frac{3}{2}$

Opgave 10 (8%).

W er et underrum af $\mathbf{R}^4$ og $W^\perp$ er det ortogonale komplement. Dimensionen af W er 2. P er standardmatricen for ortogonal projektion på W. Afkryds de sande udsagn nedenfor. Der er ialt tre.
Bemærk, at hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning. To rigtige og én forkert afkrydsning tæller for eksempel som én rigtig. Der gives ikke negative point, så én rigtig og tre forkerte tæller som nul rigtige.

- ☐ Dimensionen af $W^\perp$ er 1
- ☒ Dimensionen af $W^\perp$ er 2
- ☐ P er invertibel (regulær)
- ☒ Hvis $\mathbf{v}$ ligger i både W og i $W^\perp$, så er $\mathbf{v} = 0$
- ☐ Hvis $\mathbf{v}$ ligger i både W og i $W^\perp$, så er $|\mathbf{v}| = 1$
- ☒ Nulrummet for P er $W^\perp$
- ☐ 2 er en egenværdi for P
- ☐ $P^2 = I$

Opgave 11 (8%).

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Afkryds de sande udsagn nedenfor. Der er ialt fire.
Bemærk, at hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning. To rigtige og én forkert afkrydsning tæller for eksempel som én rigtig. Der gives ikke negative point, så én rigtig og tre forkerte tæller som nul rigtige.

- [ ] A er invertibel (regulær)
- [ ] A er på reduceret trappeform (reduceret echelonform)
- [x] A er på trappeform (echelonform)
- [ ] Nulrummet for A har dimension 1 (Nullity for A er 1)
- [x] Rangen af A er 4
- [ ] Ligningen $Ax = \mathbf{b}$ er konsistent for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$
- [ ] A er en 4×5 matrix.
- [x] A er en 5×4 matrix.
- [ ] $\text{Nullity}(A) + \text{Rang}(A) = 5$
- [x] $\text{Nullity}(A) + \text{Rang}(A) = 4$

Opgave 12 (8%).

Vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

er søjlevektorer i matricen $A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$

Besvar følgende fire sand/falsk opgaver:

a. $\det A = c$

☐ Sand ☒ Falsk

b. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uafhængige uanset, hvad a, b, c er.

☐ Sand ☒ Falsk

c. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er lineært uafhængige uanset, hvad a, b, c er.

☒ Sand ☐ Falsk

d. A har mindst to forskellige egenværdier.

☒ Sand ☐ Falsk

Her slutter eksamenssættet på dansk