Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Onsdag den 19. februar, 2014. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter, fotokopier mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

STUDIENUMMMER: ______________________

HOLDNUMMER:

- ☐ Aalborg HOLD 1 (v. Mikkel H. Brynildsen).
- ☐ Aalborg HOLD 2 (v. Olav Geil).
- ☐ Aalborg HOLD 3 (v. Leif Kjær Jørgensen.
- ☐ Aalborg HOLD 4 (v. Morten Nielsen).
- ☐ Aalborg HOLD 5 (v. Jacob Broe.
- ☐ AAU-Cph, Dansk hold (v. Iver Ottosen).
- ☐ Esbjerg, Dansk hold (v. Ulla Tradsborg).

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (9%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. Find samtlige løsninger til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Opgave 2 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Afgør i hvert af følgende fire tilfælde, om udtrykket giver mening. For hvert udtryk, der giver mening, beregn værdien. Hvis udtrykket ikke giver mening, skriv da "giver ikke mening".

1. $A\mathbf{d}$ 2. $(A+B)\mathbf{d}$ 3. BC 4. CB.

Opgave 3 (7%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Bring A på trappeform (echelonform).
2. Find determinanten af A.

Opgave 4 (8%).

$$\text{Lad } W = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

1. Find en basis for W.
2. Argumenter for, at $\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$ ligger i W.
3. Argumenter for, at $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ ikke ligger i W.

Opgave 5 (10%).

Lad $A = \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$.

1. Find egenværdierne for A.
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum.

Opgave 6 (10%).

Underrummet W af $\mathbf{R}^4$ har basis

$$\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}25\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

1. Bestem en ortogonal basis for W ved hjælp af Gram-Schmidt processen.

Opgave 7 (9%).

Lad $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Argumenter for, at A er en ortogonal matrix.
2. Argumenter for, at B er en ortogonal matrix.
3. Svarer A til en rotation? (Husk at argumentere for dit svar).
4. Svarer B til en rotation? (Husk at argumentere for dit svar).
5. Svarer AB til en rotation? (Husk at argumentere for dit svar).

Opgave 8 (8%).

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ er en basis for } \mathbf{R}^3.$$

1. Lad $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Find B^{-1}.
2. Lad $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestem $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

Kortfattet facitliste for
Reeksamen i lineær algebra
19. februar 2014

Opg. 1 $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Opg. 2

1. $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 17 \\ 11 \end{bmatrix}$
3. "giver ikke mening"
4. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Opg. 3

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (der er andre mulige svar)

2. -1

Opg. 4

1. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (der er andre mulige svar)

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \leftarrow$ nulrække efterfulgt af ikke-nul element

Opg. 5

1. $\{2, -1\}$
2. for $\lambda = 2$ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

   for $\lambda = -1$ $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

opg. 6

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix} \right\}$$

opg. 7

1. $A^T A = I$
2. $B^T B = I$
3. rotation
4. ikke rotation
5. ikke rotation

opg. 8

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (6%).

Lad A være en matrix, hvis reducerede trappeform er $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Besvar følgende tre sand/falsk opgaver:

a. A er invertibel (non-singulær, regulær)

☐ Sand ☒ Falsk

b. Søjlerne i A er lineært uafhængige.

☐ Sand ☒ Falsk

c. Rækkerne i A er lineært afhængige.

☒ Sand ☐ Falsk

Opgave 10 (8%).

A er en 5×5 matrix med determinant $\det A = 5$.

Afkryds for hvert af følgende fire spørgsmål det rigtige svar:

$\det(A^3) =$

☐ 0 ☐ 5 ☐ 15 ☐ 25 ☒ 125

$\det(A^{-1}) =$

☐ -5 ☐ 0 ☐ 1 ☒ $\frac{1}{5}$ ☐ 5

$\det\left((A^T)^{-1}\right) =$

☐ -5 ☐ 0 ☐ 1 ☒ $\frac{1}{5}$ ☐ 5

Antallet af vektorer i en basis for Col A er lig

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5

Opgave 11 (8%).

Lad

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og lad $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Besvar følgende fire sand/falsk opgaver:

a. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er en udspændende (også kaldet genererende eller frembringende) mængde for W.

☒ Sand ☐ Falsk

b. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er en basis for W.

☐ Sand ☒ Falsk

c. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en basis for W.

☒ Sand ☐ Falsk

d. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ er en udspændende (også kaldet genererende eller frembringende) mængde for W.

☒ Sand ☐ Falsk

Opgave 12 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende tre sand/falsk opgaver:

a. Der gælder $T_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

☒ Sand ☐ Falsk

b. Der gælder $T_B : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$.

☐ Sand ☒ Falsk

c. For alle $\mathbf{x}$ i $\mathbf{R}^3$ gælder der $T_A(T_B(\mathbf{x})) = T_{AB}(\mathbf{x})$

☒ Sand ☐ Falsk