

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Onsdag den 19. februar, 2014. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver. Der må gøres brug af bøger, noter, fotokopier mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn samt studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.** God arbejdslyst!

NAVN:

STUDIENUMMER:

HOLDNUMMER:

- Aalborg HOLD 1 (v. Mikkel H. Brynildsen).
- Aalborg HOLD 2 (v. Olav Geil).
- Aalborg HOLD 3 (v. Leif Kjær Jørgensen).
- Aalborg HOLD 4 (v. Morten Nielsen).
- Aalborg HOLD 5 (v. Jacob Broe).
- AAU-Cph, Dansk hold (v. Iver Ottosen).
- Esbjerg, Dansk hold (v. Ulla Tradsborg).

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (9%).

$$\text{Lad } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find samtlige løsninger til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Opgave 2 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Afgør i hvert af følgende fire tilfælde, om udtrykket giver mening. For hvert udtryk, der giver mening, beregn værdien. Hvis udtrykket ikke giver mening, skriv da "giver ikke mening".

1. $A\mathbf{d}$
2. $(A + B)\mathbf{d}$
3. BC
4. CB .

Opgave 3 (7%).

$$\text{Lad } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Bring A på trappeform (echelonform).
2. Find determinanten af A .

Opgave 4 (8%).

$$\text{Lad } W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

1. Find en basis for W .
2. Argumenter for, at $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ligger i W .
3. Argumenter for, at $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ikke ligger i W .

Opgave 5 (10%).

$$\text{Lad } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenverdierne for A .
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum.

Opgave 6 (10%).

Underrummet W af \mathbf{R}^4 har basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Bestem en ortogonal basis for W ved hjælp af Gram-Schmidt processen.

Opgave 7 (9%).

$$\text{Lad } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Argumenter for, at A er en ortogonal matrix.
2. Argumenter for, at B er en ortogonal matrix.
3. Svarer A til en rotation? (Husk at argumentere for dit svar).
4. Svarer B til en rotation? (Husk at argumentere for dit svar).
5. Svarer AB til en rotation? (Husk at argumentere for dit svar).

Opgave 8 (8%).

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ er en basis for } \mathbf{R}^3.$$

1. Lad $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Find B^{-1} .
2. Lad $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestem $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (6%).

Lad A være en matrix, hvis reducerede trappeform er $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Besvar følgende tre sand/falsk opgaver:

a. A er invertibel (non-singulær, regulær)

Sand

Falsk

b. Søjlerne i A er lineært uafhængige.

Sand

Falsk

c. Rækkerne i A er lineært afhængige.

Sand

Falsk

Opgave 10 (8%).

A er en 5×5 matrix med determinant $\det A = 5$.

Afkryds for hvert af følgende fire spørgsmål det rigtige svar:

$$\det(A^3) =$$

- 0 5 15 25 125

$$\det(A^{-1}) =$$

- 5 0 1 $\frac{1}{5}$ 5

$$\det((A^T)^{-1}) =$$

- 5 0 1 $\frac{1}{5}$ 5

Antallet af vektorer i en basis for $\text{Col } A$ er lig

- 1 2 3 4 5

Opgave 11 (8%).

Lad

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og lad $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Besvar følgende fire sand/falsk opgaver:

- a. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er en udspændende (også kaldet genererende eller frembringende) mængde for W .

Sand

Falsk

- b. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er en basis for W .

Sand

Falsk

- c. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en basis for W .

Sand

Falsk

- d. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ er en udspændende (også kaldet genererende eller frembringende) mængde for W .

Sand

Falsk

Opgave 12 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende tre sand/falsk opgaver:

a. Der gælder $T_A : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$.

Sand

Falsk

b. Der gælder $T_B : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$.

Sand

Falsk

c. For alle \mathbf{x} i \mathbf{R}^3 gælder der $T_A(T_B(\mathbf{x})) = T_{AB}(\mathbf{x})$

Sand

Falsk