Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Onsdag den 20. februar, 2013. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 9 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter, fotokopier mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder ”almindelige opgaver”. I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder ”multiple choice”opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLDNUMMER:

- ☐ Aalborg HOLD 1 (v. Lisbeth Fajstrup).
- ☐ Aalborg HOLD 2 (v. Olav Geil).
- ☐ Aalborg HOLD 3 (v. Leif Kjær Jørgensen).
- ☐ Aalborg HOLD 4 (v. Bo Rosbjerg).
- ☐ Aalborg HOLD 5 (v. Jacob Broe).
- ☐ AAU-Cph, Dansk hold (v. Aage Nielsen og Iver Ottosen).
- ☐ Esbjerg, Dansk hold (v. Ulla Tradsborg).

Del I (”almindelige opgaver”)

Opgave 1 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. Bring A på reduceret trappeform (reduceret echelonform, reduceret række-echelonform).

2. Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eller argumenter for, at den ikke har nogen løsning.

Opgave 2 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Afgør i hvert af følgende fire tilfælde, om udtrykket giver mening. For hvert udtryk, der giver mening, beregn værdien. Hvis udtrykket ikke giver mening, skriv da “giver ikke mening”.

1. $A\mathbf{c}$ 2. $B\mathbf{c}$ 3. AB 4. $BA\mathbf{c}$.

Opgave 3 (6%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

1. Find A^{-1}.

2. Argumenter for at B^{-1} ikke eksisterer. (Altså, argumenter for, at B ikke er inverterbar/invertibel/regulær).

Opgave 4 (10%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A.
2. Find en basis for nulrummet hørende til A.

Opgave 5 (8%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Find egenværdierne for A.
2. Find en basis for hvert af det tilhørende egenrum.
3. Afgør om A er diagonaliserbar (husk at argumentere for dit svar).

Opgave 6 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Bring A på trappeform (række-echelonform).
2. Bestem determinanten af A.
3. Bestem determinanten af A^4.

Opgave 7 (9%).

Lad $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær transformation. Det oplyses, at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

1. Find $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.
2. Bestem standardmatricen for T (dvs. bestem A så $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$).
3. Er T surjektiv? (Alternativt ord for surjektiv er på).
4. Er T injektiv? (Alternative ord for injektiv er en-til-en eller enentydig).

Opgave 8 (10%).

Underrummet W af $\mathbb{R}^4$ har basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Bestem en ortogonal basis for W ved hjælp af Gram-Schmidt processen.
2. Bestem herefter en ortonormal basis for W.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (6%).

Det oplyses, at $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er lineært uafhængig.

Besvar følgende to sand/falsk opgaver:

a. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ er inverterbar (invertibel/regulær).

☐ Sand ☐ Falsk

b. Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Der gælder $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 10 (6%).

Besvar følgende tre sand/falsk opgaver:

a. Lad B være en $n \times n$ inverterbar (invertibel/regulær) matrix. Da gælder $\det B = 0$.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Lad B være en $n \times n$ inverterbar (invertibel/regulær) matrix og lad $\mathbf{b}$ være en $n \times 1$ søjlevektor. Da gælder der, at $\mathbf{x} = B^{-1}\mathbf{b}$ er en entydig løsning til ligningen $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

☐ Sand ☐ Falsk

c. Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation. Lad A være den tilhørende standardmatrix. Da er A en $m \times n$ matrix.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 11 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Afkryds sande udsagn blandt de 10 udsagn nedenfor.

(*Alene de udsagn, du afkrydser indgår i bedømmelsen. Blandt de udsagn, du afkrydser vil et forkert afkrydset udsagn ophæve et korrekt afkrydset udsagn. Har du eksempelvis afkrydset 5 udsagn, hvoraf 4 er korrekte, men 1 er forkert, så får du point for 4-1=3 korrekte svar. Har du afkrydset 4 udsagn, af hvilke 2 er korrekte, men 2 er forkerte, da får du point for 2-2=0 korrekte svar. Du kan ikke opnå en negativ score. Så hvis du har afkrydset 4 udsagn, hvoraf 1 er korrekt, men 3 er forkerte, ja så får du point for 0 korrekte svar.*)

- ☐ A er kvadratisk.
- ☐ A er symmetrisk.
- ☐ A har fem forskellige egenværdier.
- ☐ A er diagonaliserbar.
- ☐ A er inverterbar (invertibel/regulær).
- ☐ $\det(A) = 0$.
- ☐ rank $A = 5$.
- ☐ nullity $A = 4$.
- ☐ A's søjler udgør en basis for $\mathbb{R}^5$.
- ☐ Rækkerne i A er lineært afhængige.

Opgave 12 (8%).

I denne opgave arbejdes der med lineære operatorer fra $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^2$. Lad A være standardmatricen for en rotation mod uret med 20°. Lad B være standardmatricen for en rotation mod uret med 80°. Lad C være standardmatricen for en spejling om x-aksen (første-aksen).

Besvar følgende fire sand/falsk opgaver:

a. $AB = BA$

☐ Sand ☐ Falsk

b. $CC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ Sand ☐ Falsk

c. BC er standardmatricen for en spejling omkring en linie.

☐ Sand ☐ Falsk

d. -1 er egenværdi for C.

☐ Sand ☐ Falsk