

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

23. august 2019, 9:00 – 13:00

Eksamenssættet består af 11 nummererede sider med 12 afkrydsningsopgaver. For hvert opgave er der angivet et antal point; delspørgsmålene vægtes ligeligt inden for hver opgave.

Hele opgavesættet svarer til 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv.

Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses digitalt i moodle.

Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

I opgaverne 10, 11 og 12 evalueres der efter følgende princip:

Hver forkert afkrydsning ophæver (modregnes i) én rigtig afkrydsning.

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

Opgave 1 (8 point)

Opgaven tager udgangspunkt i ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -3x_1 + 9x_2 - 5x_3 &= 14 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= -7\end{aligned}$$

1. Angiv hvilken af matricerne nedenfor, der svarer til ligningssystemets udvidede koefficientmatrix/totalmatrix $[A \mathbf{b}]$?

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -5 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \\ -4 & 14 & -7 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 9 & -5 & 14 \\ 2 & -6 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

2. Hvilken af de følgende matricer er den reducerede echelonmatrix/trappematrix, som er rækkeækvivalent med $[A \mathbf{b}]$?

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Hvilken af de følgende påstande er sand?

Systemet er inkonsistent.

$x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 2$ er en blandt flere af systemets løsninger.

$x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 2$ er systemets eneste løsning.

$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$ er systemets eneste løsning.

$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$ er en blandt flere af systemets løsninger.

$x_1 = -8, x_2 = 0, x_3 = 2$ er systemets eneste løsning.

4. Marker de sande udsagn blandt de følgende påstande:

Vektoren $\mathbf{w} = (-8, 0, 2)$ er ikke en løsning til ligningssystemet.

Vektoren $\mathbf{w} = (-8, 0, 2)$ opfylder $\mathbf{w} = A^{-1}\mathbf{b}$ for $\mathbf{b} = (-4, 14, -7)$.

Vektoren $\mathbf{w} = (-8, 0, 2)$ løser $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, men den er ikke lig med $A^{-1}\mathbf{b}$.

Koefficientmatricen A er ikke inverterbar.

Opgave 2 (8 point)

Her ses på matricen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ -2 & -4 & -7 & 11 & -7 \\ 2 & 4 & 6 & -9 & 8 \end{bmatrix}$, hvori søjlerne betegnes med \mathbf{a}_j således at $A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5]$.

1. Angiv det eller de systemer af vektorer, der udgør en basis for A 's nulrum, $\text{Null } A$.

$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. Angiv dimensionen af A 's nulrum, $\dim \text{Null } A$.

0 1 2 3 4 5

3. Angiv dimensionen af A 's søjlerum, $\dim \text{Col } A$.

0 1 2 3 4 5

4. Pivotsøjlerne i A udgør en basis \mathcal{B} for $\text{Col } A$. Angiv hvilken af vektorerne nedenfor der er lig med $[\mathbf{a}_5]_{\mathcal{B}}$, det vil sige koordinatsøjlen for \mathbf{a}_5 med hensyn til \mathcal{B} .

$\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Opgave 3 (8 point)

Her ses på matricerne A og B samt vektoren \mathbf{b} , der er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilken af de følgende vektorer stemmer overens med produktet $A\mathbf{b}$?

$\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$ ingen af dem

2. Hvilken af de følgende matricer stemmer overens med produktet AB ?

$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 8 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & -1 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & -1 \\ -17 & -22 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & -1 \\ -17 & -24 \end{bmatrix}$

3. Hvilken af de følgende matricer stemmer overens med inversen A^{-1} ?

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} -20 & -16 & -7 \\ 9 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -20 & -16 & -7 \\ 9 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ingen af dem

4. Hvilken af de følgende matricer stemmer overens med produktet $A^{-1}B$?

$\begin{bmatrix} -76 & -117 \\ -16 & -13 \\ 24 & 22 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -76 & -119 \\ 34 & -14 \\ 23 & 22 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -76 & -119 \\ 34 & 53 \\ 11 & 17 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} -72 & -119 \\ 34 & -14 \\ 23 & 21 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -76 & -119 \\ -34 & 53 \\ 23 & 22 \end{bmatrix}$ ingen af dem

Opgave 4 (8 point)

1. Angiv værdien af determinanten for matricen $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- 13 -21 -30 30 21 13

2. Angiv værdien af determinanten for matricen $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

- 10 -7 -1 0 1 7 10

3. Angiv værdien af determinanten for matricen $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}$.

- 0 1 6 8 10 12

4. Hvilket af følgende tal er lig med determinanten af $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$?

- 0 2 6 8 10 12

Opgave 5 (8 point)

Vektorerne $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ udgør en basis \mathcal{B}

for \mathcal{R}^4 . Hvis man anvender Gram-Schmidt processen på \mathcal{B} , så fremkommer der en ortogonal basis bestående af vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og \mathbf{v}_4 . Der gælder:

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1$ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ ingen af delene
2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2$ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$
 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ ingen af delene
3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3$ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$
 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{v}_2$ ingen af delene
4. $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4$ $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$
 $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1$ $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 + 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$
 $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ ingen af delene

Opgave 6 (8 point)

Opgaven vedrører matricen $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Hvilket af de følgende polynomier er A 's karakteristiske polynomium?

- $-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 24\lambda$ $-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 34\lambda + 24$
 $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 25\lambda - 10$ intet af dem

2. Hvilke af de følgende vektorer er egenvektorer til matricen A ?

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Har rummet \mathcal{R}^3 en basis bestående af egenvektorer for A ?

- Ja Nej

4. Hvilket af de følgende tal er lig med $\det(A)$?

- 8 12 23 24 25 26

Opgave 7 (8 point)

I rummet \mathcal{R}^3 er der givet en plan W ved ligningen $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$.

1. Marker den matrix, som er lig med den ortogonale projektionsmatrix P_W :

- $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Marker den vektor \mathbf{w} i W , der er tættest på vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$:

- $\begin{bmatrix} -16 \\ 16 \\ -24 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 10 \\ -20 \\ 25 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ingen af dem

Opgave 8 (8 point)

En lineær transformation $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ har standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilken værdi har tallet n ?

- 1 2 3 4 5

2. Hvilken værdi har tallet m ?

- 1 2 3 4 5

3. Hvad er rangen af A ?

- 0 1 2 3 4 5

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af T ?

- 0 1 2 3 4 5

5. Hvad er dimensionen af søjlerummet af A ?

- 0 1 2 3 4 5

6. Hvad er dimensionen af nulrummet af den transponerede matrix A^T , dvs. $\dim(\text{Null } A^T)$?

- 0 1 2 3 4 5

7. Hvad er dimensionen af ortogonalkomplementet til nulrummet af A , dvs. $\dim(\text{Null } A)^\perp$?

- 0 1 2 3 4 5

8. Hvad er dimensionen af rækkerummet af A , dvs. $\dim(\text{Row } A)$?

- 0 1 2 3 4 5

Opgave 9 (8 point)

Opgaven vedrører følgende system af ordinære differentialligninger

$$y_1'(t) = 8y_1(t) - 6y_2(t), \quad y_2'(t) = 9y_1(t) - 7y_2(t).$$

1. Angiv den matrix, som svarer til systemets koefficientmatrix A :

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -6 \\ 1 & 9 & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$

2. Marker mængden af egenverdier for A :

$\{-1, 2\}$ $\{1, -3\}$ $\{-2, 3\}$ $\{2, 3\}$ $\{2, -3\}$

3. Marker det system af vektorer, der består af egenvektorer for A :

$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Angiv differentialligningssystemets løsningsmængde, idet a og b betegner vilkårlige reelle tal:

$y_1(t) = -3ae^t - be^{-3t},$
 $y_2(t) = ae^t + be^{-3t}.$

$y_1(t) = 2ae^{-3t} + be^{2t},$
 $y_2(t) = 3ae^{-3t} + be^{2t}.$

$y_1(t) = ae^{2t} + 2be^{3t},$
 $y_2(t) = ae^{2t} + 3be^{3t}.$

$y_1(t) = ae^{2t} + 2be^{-t},$
 $y_2(t) = ae^{2t} + 3be^{-t}.$

Opgave 10 (8 point, med modregning)

I denne opgave betragtes de følgende 4 vektorer:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Er det sandt, at

1. \mathbf{v}_2 udspændt af \mathbf{v}_1 ?

Ja

Nej

2. \mathbf{v}_2 er en linearkombination af \mathbf{v}_1 ?

Ja

Nej

3. \mathbf{v}_3 er en linearkombination af \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 ?

Ja

Nej

4. \mathbf{v}_4 er en linearkombination af \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 og \mathbf{v}_3 ?

Ja

Nej

5. tre af vektorerne \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 og \mathbf{v}_4 frembringer den øvrige ?

Ja

Nej

6. vektorerne \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 og \mathbf{v}_4 er lineært uafhængige ?

Ja

Nej

7. den lineære operator T på \mathcal{R}^4 med standardmatricen $A = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4]$ opfylder at $\dim \text{Null } T = 3$?

Ja

Nej

8. hvis en vektor \mathbf{w} i \mathcal{R}^4 tilhører ortogonalkomplementet $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}^\perp$, så er $\mathbf{w} = 0$?

Ja

Nej

Opgave 11 (8 point, med modregning)

I denne opgave betragtes de følgende 4 matricer:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

1. Marker den eller de matricer, som er diagonaliserbare:

- A B C D

2. Marker den eller de matricer, som A er similær med:

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ingen af matricerne

3. Marker den eller de matricer, som B er similær med:

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ingen af matricerne

4. Marker den eller de matricer, som C er similær med:

- $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ingen af matricerne

5. Marker den eller de matricer, som D er similær med:

- $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 7 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ingen af matricerne

6. Marker den eller de matricer, som har 0 (nul) som egenværdi:

- A C ingen af dem
 B D

7. Marker den eller de matricer, som er inverterbare/regulære:

- A C ingen af dem
 B D

8. Marker den eller de matricer, som er ortogonale:

- A C ingen af dem
 B D

Opgave 12 (12 point, med modregning)

Marker hver matrix, som har sine egenverdier blandt tallene 1, 4 og 9:

$[9]$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$