

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

26. februar 2020 kl. 9:00-13:00

Dette eksamenssæt består af 11 nummererede sider med 13 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt. Eksamen afholdes som digital stedprøve.

Tilladte hjælpemidler: Bøger, noter, fotokopier og print.

Ikke tilladt: Elektroniske hjælpemidler såsom lommeregner eller matematikprogrammer på computeren. Elektroniske dokumenter.

Der gives fuld point, hvis alle korrekte og ingen forkerte svar er afkrydset. Et forkert svar i et spørgsmål annullerer et korrekt svar i samme spørgsmål.

Opgave 1 (10 point)

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ved matrixmultiplikation fås matricen $C = AB$.

(a) (5 point). Hvad er størrelsen af matrix C ?

2×3

3×3

2×4

3×2

4×3

4×2

(b) (5 point). Hvad er indgangen c_{13} ?

-3

0

4

-1

1

3

Opgave 2 (2 point)

Tre matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Hvilke matrixprodukter er defineret?

BA og BC

AC, BC og BA

C^2, A^2 og B^2

CA, CB og BC

$C^T A, CA$ og AC

AB^T, CB og CA

Opgave 3 (10 point)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\ -x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

Markér de to rigtige udsagn herunder:

- Ligningssystemet har ingen løsninger
- $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ og $x_3 = 1$ er en løsning til ligningssystemet
- $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ og $x_3 = 1$ er en løsning til ligningssystemet
- Ligningssystemet har netop to løsninger
- Ligningssystemet har uendeligt mange løsninger
- Ligningssystemet har netop én løsning.

Opgave 4 (10 point)

Det karakteristiske polynomium for matricen

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & -6 & 3 \\ 2 & -21 & 2 \end{bmatrix}$$

er $-t^3 + 2t^2 + 3t$.

(a) (2 point). Hvilke tre af følgende tal er egen værdi for A ?

- -3 -2 -1 0 1 2 3

(b) (2 point). Hvilken af følgende er egen vektor for A ?

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(c) (2 point). Er A invertibel?

- Ja Nej

(d) (2 point). Er A diagonaliserbar?

- Ja Nej

(e) (2 point). Hvis $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, så er EA :

- $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 2 & -21 & 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -9 & 0 & -9 \\ 2 & -21 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 9 & 0 & 9 \\ 2 & -21 & 2 \end{bmatrix}$

Opgave 5 (10 point)

Lad $T: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$ være en lineær transformation med standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Hvad er n ?

- 0 1 2 3 4

(b) (2 point). Hvad er m ?

- 0 1 2 3 4

(c) (2 point). Hvad er rangen $\text{Rank}(A)$?

- 0 2 4 6
 1 3 5

(d) (2 point). Hvad er nulliteten $\text{Nullity}(A)$?

- 0 2 4 6
 1 3 5

(e) (2 point). Om ligningssystemet $Ax = b$ gælder:

- Det er altid konsistent. Det har enten ingen eller uendelig mange løsninger.
 Det har enten ingen eller præcis én løsning. Ingen af de foregående

Opgave 6 (10 point)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) (5 point) Hvad er $A\mathbf{v}$?

$\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ingen af de nævnte

(b) (5 point) Hvad er den inverse til A ?

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Opgave 7 (9 point)

Lad $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ og $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(a) (3 point). Er \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 ortogonale?

Ja

Nej

Hverken ja eller nej

(b) (3 point). Hvad er orthogonalprojektion af \mathbf{u} på W ?

$\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

(c) (3 point). Hvad er afstanden fra \mathbf{u} til W ?

2

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{6}$

0

$\frac{3}{4}$

Ingen af de nævnte.

Opgave 8 (2 point)

Lad $T: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^4$ og $S: \mathcal{R}^4 \rightarrow \mathcal{R}^2$ være lineære transformationer, og definér $U = TS: \mathcal{R}^4 \rightarrow \mathcal{R}^4$, altså U er den lineære transformation, som fås ved først at anvende S og dernæst T , og $V = ST: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$, altså V er den transformation, som fås ved først at anvende T og dernæst S . Hvilke fire af følgende udsagn kan man konkludere uden at vide mere om T , S , U og V ?

- T kan ikke være surjektiv (på)
- T kan ikke være injektiv (én-til-én)
- S kan ikke være surjektiv (på)
- S kan ikke være injektiv (én-til-én)
- U kan ikke være surjektiv (på)
- U kan ikke være injektiv (én-til-én)
- V kan ikke være surjektiv (på)
- V kan ikke være injektiv (én-til-én)

Opgave 9 (6 point)

Lad $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 16 \end{bmatrix}$. Hvis man anvender en Gram-Schmidt-process på $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, så man får de ortogonale vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, så gælder:

(a) (2 point)

- $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1$ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ ingen af delene

(b) (2 point)

- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{v}_1$ ingen af delene
 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{b}_1$ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{v}_1$

(c) (2 point)

- $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{v}_1$ ingen af delene
 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3$

Opgave 10 (10 point)

Lad A og B være 3×3 -matricer med determinanter $\det(A) = -4$ og $\det(B) = 0$, hhv.

(a) (2 point). Hvad er $\det(A^T)$?

- 2 0 -4 4 -8 Ikke defineret

(b) (2 point). Hvad er $\det(-A)$?

- 2 0 -4 4 -8 Ikke defineret

(c) (2 point). Hvad er $\det(AB^{-1})$?

- 2 0 -4 4 -8 Ikke defineret

(d) (2 point). Hvad er $\det(-B^2)$?

- 2 0 -4 4 -8 Ikke defineret

(e) (2 point). Hvad er $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right)$?

- 2 0 -4 4 -8 Ikke defineret

Opgave 11 (10 point)

Matricen A er rækkereduceret til matricen R , hvor

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5 \ \mathbf{a}_6 \ \mathbf{a}_7]$ hvor \mathbf{a}_i er i 'te søjle i A .

(a) (2 point). Hvad er nulliteten $\text{Nullity}(A)$?

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger. |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 7 | |
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 8 | |

(b) (2 point). Hvad er rangen $\text{Rank}(A)$?

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger. |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 7 | |
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 8 | |

(c) (2 point). Hvilke søjler i A er pivotsøjler?

- | | | |
|---|---|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> \mathbf{a}_4 og \mathbf{a}_6 | <input type="checkbox"/> $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ og \mathbf{a}_5 | <input type="checkbox"/> Alle |
| <input type="checkbox"/> $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ og \mathbf{a}_6 | <input type="checkbox"/> $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7$ | <input type="checkbox"/> Ingen |

(d) (2 point). Hvilket af følgende udsagn er korrekt?

- $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ er lineært uafhængig.
- $\mathbf{a}_4 = 3\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_3$
- $\mathbf{a}_4 = -3\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$
- $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$
- $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$
- \mathbf{a}_5 er en linearkombination af $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$

(e) (2 point). Hvis $A = [B \mathbf{b}]$ er totalmatricen/den udvidede koefficientmatrix for et system af lineære ligninger i x_1, x_2, \dots, x_6 , hvilket af følgende udsagn er så korrekt?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Ligningssystemet har ingen løsninger | <input type="checkbox"/> Ligningssystemet har præcis én løsning. |
| <input type="checkbox"/> Ligningssystemet har uendelig mange løsninger. | <input type="checkbox"/> Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger. |

Opgave 12 (8 point)

A og B er to kvadratiske matricer, \mathbf{v} er egenvektor for A med egenværdi 8, $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ er egenvektor for B med egenværdi -4 og B er invertibel.

(a) (2 point). Er \mathbf{v} en egenvektor for AB ?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -2 | <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi 64 |
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi 4 | <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -32 |
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -8 | <input type="checkbox"/> Nej |

(b) (2 point). Er \mathbf{v} en egenvektor for A^2 ?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -2 | <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi 64 |
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi 4 | <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -32 |
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -8 | <input type="checkbox"/> Nej |

(c) (2 point). Er \mathbf{v} en egenvektor for $4B - 2A$?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -2 | <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi 64 |
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi 4 | <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -32 |
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -8 | <input type="checkbox"/> Nej |

(d) (2 point). Er \mathbf{v} en egenvektor for AB^{-1} ?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -2 | <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi 64 |
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi 4 | <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -32 |
| <input type="checkbox"/> Ja, med egenværdi -8 | <input type="checkbox"/> Nej |

Opgave 13 (3 point)

I MATLABs Command Window indtastes følgende:

```
>> u = [1; 1; 1; 1];
>> v = [1; 2; 3; 4];
>> w = [1; 3; 4; 10];
>> z = [1; 4; 10; 1];
>> A = [u v w z];
>> B = [u v w z w-u];
>> rref(A)
ans =
     1     0     0    -5
     0     1     0     9
     0     0     1    -3
     0     0     0     0
```

Hvilket resultat får man, hvis man efterfølgende indtaster rref(B) i MATLABs Command Window?

ans =
 1 0 0 -5 0
 0 1 0 9 0
 0 0 1 -3 0
 0 0 0 0 1

ans =
 1 0 0 1 1
 0 1 0 3 0
 0 0 1 4 -1
 0 0 0 0 0

ans =
 1 0 0 -5 -1
 0 1 0 9 0
 0 0 1 -3 1
 0 0 0 0 0

ans =
 1 0 0 -5 -1 0
 0 1 0 9 0 0
 0 0 1 -3 0 1
 0 0 0 0 0 0

ans =
 1 0 0 1 0 -1
 0 1 0 3 0 0
 0 0 1 4 1 0
 0 0 0 0 0 0

ans =
 1 0 0 1 -5 0
 0 1 0 3 9 0
 0 0 1 4 -3 0
 0 0 0 0 0 1