Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

26. februar 2020 kl. 9:00-13:00

Dette eksamenssæt består af 11 nummererede sider med 13 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt. Eksamen afholdes som digital stedprøve.

Tilladte hjælpemidler: Bøger, noter, fotokopier og print.

Ikke tilladt: Elektroniske hjælpemidler såsom lommeregner eller matematikprogrammer på computeren. Elektroniske dokumenter.

Facit

Der gives fuld point, hvis alle korrekte og ingen forkerte svar er afkrydset. Et forkert svar i et spørgsmål annulerer et korrekt svar i samme spørgsmål.

Opgave 1 (10 point)

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ved matrixmultiplikation fås matricen $C = AB$.

(a) (5 point). Hvad er størrelsen af matrix C?

- [x] 2×3
- [ ] 3×3
- [ ] 2×4
- [ ] 3×2
- [ ] 4×3
- [ ] 4×2

(b) (5 point). Hvad er indgangen c_{13}?

- [ ] -3
- [ ] 0
- [ ] 4
- [x] -1
- [ ] 1
- [ ] 3

Opgave 2 (2 point)

Tre matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Hvilke matrixprodukter er defineret?

- [ ] BA og BC
- [ ] AC, BC og BA
- [ ] C^2, A^2 og B^2
- [x] CA, CB og BC
- [ ] $C^T A$, CA og AC
- [ ] AB^T, CB og CA

Opgave 3 (10 point)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\ -x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Markér de to rigtige udsagn herunder:

- [ ] Ligningssystemet har ingen løsninger
- [ ] $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ og $x_3 = 1$ er en løsning til ligningssystemet
- [x] $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ og $x_3 = 1$ er en løsning til ligningssystemet
- [ ] Ligningssystemet har netop to løsninger
- [ ] Ligningssystemet har uendeligt mange løsninger
- [x] Ligningssystemet har netop én løsning.

Opgave 4 (10 point)

Det karakteristiske polynomium for matricen

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & -6 & 3 \\ 2 & -21 & 2 \end{bmatrix}$$

er $-t^3 + 2t^2 + 3t$.

(a) (2 point). Hvilke tre af følgende tal er egenværdi for A?

☐ -3 ☐ -2 ☑ -1 ☑ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☑ 3

(b) (2 point). Hvilken af følgende er egenvektor for A?

☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(c) (2 point). Er A invertibel?

☐ Ja ☑ Nej

(d) (2 point). Er A diagonaliserbar?

☑ Ja ☐ Nej

(e) (2 point). Hvis $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, så er EA:

☐ $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 2 & -21 & 2 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -9 & 0 & -9 \\ 2 & -21 & 2 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 9 & 0 & 9 \\ 2 & -21 & 2 \end{bmatrix}$

Opgave 5 (10 point)

Lad $T\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ være en lineær transformation med standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Hvad er n?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☑ 3 ☐ 4

(b) (2 point). Hvad er m?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☑ 4

(c) (2 point). Hvad er rangen Rank(A)?

☐ 0 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 6
☐ 1 ☑ 3 ☐ 5

(d) (2 point). Hvad er nulliteten Nullity(A)?

☑ 0 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 6
☐ 1 ☐ 3 ☐ 5

(e) (2 point). Om ligningssystemet $Ax = b$ gælder:

☐ Det er altid konsistent.

☑ Det har enten ingen eller præcis én løsning.

☐ Det har enten ingen eller uendelig mange løsninger.

☐ Ingen af de foregående

Opgave 6 (10 point)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) (5 point) Hvad er $A\mathbf{v}$?

☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ☐ Ingen af de nævnte

(b) (5 point) Hvad er den inverse til A?

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Opgave 7 (9 point)

Lad $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ og $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(a) (3 point). Er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ortogonale?

☑ Ja ☐ Nej ☐ Hverken ja eller nej

(b) (3 point). Hvad er ortogonalprojektionen af $\mathbf{u}$ på W?

☐ $\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

(c) (3 point). Hvad er afstanden fra $\mathbf{u}$ til W?

☐ 2 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{6}$

☑ 0 ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ Ingen af de nævnte.

Opgave 8 (2 point)

Lad $T\colon \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^4$ og $S\colon \mathcal{R}^4 \to \mathcal{R}^2$ være lineære transformationer, og definér $U = TS\colon \mathcal{R}^4 \to \mathcal{R}^4$, altså U er den lineære transformation, som fås ved først at anvende S og dernæst T, og $V = ST\colon \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$, altså V er den transformation, som fås ved først at anvende T og dernæst S. Hvilke fire af følgende udsagn kan man konkludere uden at vide mere om T, S, U og V?

☑ T kan ikke være surjektiv (på)

☐ T kan ikke være injektiv (én-til-én)

☐ S kan ikke være surjektiv (på)

☑ S kan ikke være injektiv (én-til-én)

☑ U kan ikke være surjektiv (på)

☑ U kan ikke være injektiv (én-til-én)

☐ V kan ikke være surjektiv (på)

☐ V kan ikke være injektiv (én-til-én)

Opgave 9 (6 point)

Lad $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 16 \end{bmatrix}$. Hvis man anvender en Gram-Schmidt-process på $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, så man får de ortogonale vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, så gælder:

(a) (2 point)

☐ $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1$ ☑ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ ☐ ingen af delene

(b) (2 point)

☐ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_1$ ☑ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{v}_1$ ☐ ingen af delene

☐ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{b}_1$ ☐ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{v}_1$

(c) (2 point)

☐ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ☐ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{v}_1$ ☐ ingen af delene

☐ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ☑ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3$

Opgave 10 (10 point)

Lad A og B være 3×3-matricer med determinanter $\det(A) = -4$ og $\det(B) = 0$, hhv.

(a) (2 point). Hvad er $\det(A^T)$?

☐ 2 ☐ 0 ☑ -4 ☐ 4 ☐ -8 ☐ Ikke defineret

(b) (2 point). Hvad er $\det(-A)$?

☐ 2 ☐ 0 ☐ -4 ☑ 4 ☐ -8 ☐ Ikke defineret

(c) (2 point). Hvad er $\det(AB^{-1})$?

☐ 2 ☐ 0 ☐ -4 ☐ 4 ☐ -8 ☑ Ikke defineret

(d) (2 point). Hvad er $\det(-B^2)$?

☐ 2 ☑ 0 ☐ -4 ☐ 4 ☐ -8 ☐ Ikke defineret

(e) (2 point). Hvad er $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right)$?

☐ 2 ☐ 0 ☑ -4 ☐ 4 ☐ -8 ☐ Ikke defineret

Opgave 11 (10 point)

Matricen A er rækkereduceret til matricen R, hvor

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_5\ \mathbf{a}_6\ \mathbf{a}_7]$ hvor $\mathbf{a}_i$ er i'te søjle i A.

(a) (2 point). Hvad er nulliteten Nullity(A)?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☑ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger.

(b) (2 point). Hvad er rangen Rank(A)?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☑ 5
- ☐ 6
- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger.

(c) (2 point). Hvilke søjler i A er pivotsøjler?

- ☐ $\mathbf{a}_4$ og $\mathbf{a}_6$
- ☐ $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ og $\mathbf{a}_6$
- ☐ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ og $\mathbf{a}_5$
- ☑ $\mathbf{a}_1$,$\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_7$
- ☐ Alle
- ☐ Ingen

(d) (2 point). Hvillket at følgende udsagn er korrekt?

- ☐ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ er lineært uafhængig.
- ☐ $\mathbf{a}_4 = 3\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_3$
- ☑ $\mathbf{a}_4 = -3\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$
- ☐ $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$
- ☐ $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$
- ☐ $\mathbf{a}_5$ er en linearkombination af $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$

(e) (2 point). Hvis $A = [B\ \mathbf{b}]$ er totalmatricen/den udvidede koefficientmatrix for et system af lineære ligninger i $x_1, x_2, \ldots, x_6$, hvilket af følgende udsagn er så korrekt?

- ☑ Ligningssystemet har ingen løsninger
- ☐ Ligningssystemet har uendelig mange løsninger.
- ☐ Ligningssystemet har præcis én løsning.
- ☐ Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger.

Opgave 12 (8 point)

A og B er to kvadratiske matricer, $\mathbf{v}$ er egenvektor for A med egenværdi 8, $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ er egenvektor for B med egenværdi -4 og B er invertibel.

(a) (2 point). Er $\mathbf{v}$ en egenvektor for AB?

- ☐ Ja, med egenværdi -2
- ☐ Ja, med egenværdi 4
- ☐ Ja, med egenværdi -8
- ☐ Ja, med egenværdi 64
- ☑ Ja, med egenværdi -32
- ☐ Nej

(b) (2 point). Er $\mathbf{v}$ en egenvektor for A^2?

- ☐ Ja, med egenværdi -2
- ☐ Ja, med egenværdi 4
- ☐ Ja, med egenværdi -8
- ☑ Ja, med egenværdi 64
- ☐ Ja, med egenværdi -32
- ☐ Nej

(c) (2 point). Er $\mathbf{v}$ en egenvektor for $4B - 2A$?

- ☐ Ja, med egenværdi -2
- ☐ Ja, med egenværdi 4
- ☐ Ja, med egenværdi -8
- ☐ Ja, med egenværdi 64
- ☑ Ja, med egenværdi -32
- ☐ Nej

(d) (2 point). Er $\mathbf{v}$ en egenvektor for AB^{-1}?

- ☑ Ja, med egenværdi -2
- ☐ Ja, med egenværdi 4
- ☐ Ja, med egenværdi -8
- ☐ Ja, med egenværdi 64
- ☐ Ja, med egenværdi -32
- ☐ Nej

Opgave 13 (3 point)

I MATLABs Command Window indtastes følgende:

```
>> u = [1; 1; 1; 1];
>> v = [1; 2; 3; 4];
>> w = [1; 3; 4; 10];
>> z = [1; 4; 10; 1];
>> A = [u v w z];
>> B = [u v w z w-u];
>> rref(A)
 ans =
         1    0    0   -5
         0    1    0    9
         0    0    1   -3
         0    0    0    0
```

Hvilket resultat får man, hvis man efterfølgende indtaster `rref(B)` i MATLABs Command Window?

☐
```
ans =
         1    0    0   -5    0
         0    1    0    9    0
         0    0    1   -3    0
         0    0    0    0    1
```

☐
```
ans =
         1    0    0   -5   -1    0
         0    1    0    9    0    0
         0    0    1   -3    0    1
         0    0    0    0    0    0
```

☐
```
ans =
         1    0    0    1    1
         0    1    0    3    0
         0    0    1    4   -1
         0    0    0    0    0
```

☐
```
ans =
         1    0    0    1    0   -1
         0    1    0    3    0    0
         0    0    1    4    1    0
         0    0    0    0    0    0
```

☑
```
ans =
         1    0    0   -5   -1
         0    1    0    9    0
         0    0    1   -3    1
         0    0    0    0    0
```

☐
```
ans =
         1    0    0    1   -5    0
         0    1    0    3    9    0
         0    0    1    4   -3    0
         0    0    0    0    0    1
```