To find the English version of the exam, please read from the other end!

Se venligst bort fra den engelske tekst på bagsiden, hvis du følger den danske version af prøven.

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

24. august 2018, 9:00 – 13:00

Eksamenssættet består af 9 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver.
For hvert spørgsmål er der angivet et antal point.
Hele opgavesættet svarer til 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv.
Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i dette opgavesæt.
Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

I opgaverne 11, 12, 13 og 14 evalueres der efter følgende princip:
Hver forkert afkrydsning ophæver (modregnes i) én rigtig afkrydsning.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

NAVN:____________________________________

STUDIENUMMMER:____________________________________

Facit

Opgave 1 (8 point)

1. Er ligningssystemet

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -7x_2 & +7x_3 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & -4 \end{array}$$

   konsistent?

   ☐ Ja ☑ Nej

2. Hvor mange løsninger har ligningssystemet?

   ☐ 1 ☑ ingen
   ☐ 3 ☐ uendelig mange

3. Er ligningssystemet

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -7x_2 & +7x_3 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 2 \end{array}$$

   konsistent?

   ☑ Ja ☐ Nej

4. Hvor mange løsninger har ligningssystemet?

   ☐ 1 ☐ ingen
   ☐ 3 ☑ uendelig mange

Problem 2 (6 points)

Her er givet en totalmatrix $[A \;\; \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -4 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$. Når man bringer $[A \; \mathbf{b}]$ på reduceret echelonform fås matricen $[H \; \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Hvilket af de følgende ligningssystemer svarer til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

   ☐ $\left\{ \begin{array}{rrrrrrcl} 3x_1 & & & -2x_4 & +4x_5 & & = & 0 \\ & +6x_2 & & -4x_4 & +8x_5 & +2x_6 & = & 0 \\ & & +4x_3 & -2x_4 & +7x_5 & +2x_6 & = & 0 \end{array} \right.$

   ☐ $\left\{ \begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & +4x_5 & & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -4x_4 & +8x_5 & +2x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & +7x_5 & +2x_6 & = & 0 \end{array} \right.$

   ☑ $\left\{ \begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & +4x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -4x_4 & +8x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & +7x_5 & = & 2 \end{array} \right.$

2. Hvad er rangen af koefficientmatricen A?

   ☐ 1 ☑ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

3. Hvad er rangen af den udvidede koefficientmatrix $[A \; \mathbf{b}]$?

   ☐ 1 ☐ 2 ☑ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

4. Hvad er nulliteten af matricen A?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☑ 3 ☐ 4 ☐ 5

5. Er det sandt at vektorerne $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ udgør en basis for Null A ?

   ☐ Ja ☑ Nej

6. Udgør vektorerne $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en basis for Null A ?

   ☑ Ja ☐ Nej

Opgave 3 (6 point)

En lineær transformation $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ har standard matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Hvilken værdi har tallet n?

   ☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☐ 5

2. Hvilken værdi har tallet m?

   ☑ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

3. Hvad er rangen af A?

   ☑ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af A?

   ☐ 0 ☐ 1 ☑ 2 ☐ 3 ☐ 4

5. Er T på (surjektiv)?

   ☑ Ja ☐ Nej

6. Er T en-til-en (injektiv)?

   ☐ Ja ☑ Nej

Opgave 4 (6 point)

1. Angiv værdien af determinanten for matricen $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   ☐ 6 ☐ 10 ☐ 11 ☑ -10 ☐ -7

2. Angiv værdien af determinanten for matricen $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   ☐ 6 ☐ 7 ☑ -7 ☐ -6 ☐ 0

3. Hvilket af følgende tal er lig med determinanten af inversen B^{-1}?

   ☐ -3 ☐ $\frac{1}{7}$ ☐ 3

   ☐ $-\frac{1}{6}$ ☑ $-\frac{1}{7}$ ☐ intet af dem

Opgave 5 (10 point)

Opgaven vedrører matricen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Hvilket af de følgende polynomier er A's karakteristiske polynomium?

   ☐ $-\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda + 3$ ☐ $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3$
   ☑ $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3$ ☐ intet af dem

2. Hvilke af de følgende vektorer er egenvektorer til matricen A?

   ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Er matricen A diagonaliserbar?

   ☑ Ja ☐ Nej

4. Hvilket af de følgende tal er lig med $\det(A)$?

   ☐ 0 ☐ 2 ☑ 3 ☐ 4 ☐ -4 ☐ -3

5. Er matricen A regulær/invertibel?

   ☑ Ja ☐ Nej

Opgave 6 (6 point)

Tre vektorer er givet ved at $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$,

1. Hvad er dimensionen af underrummet $U = \operatorname{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☑ 3 ☐ 4

2. Er $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ en ortonormal mængde ?

   ☑ Ja ☐ Nej

3. Hvad er dimensionen af $U^\perp$?

   ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☑ 1 ☐ 0 ☐ -1 ☐ -2 ☐ -3 ☐ -4

Opgave 7 (10 point)

I rummet $\mathcal{R}^3$ er der givet en plan W ved ligningen $x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$.

1. Marker den matrix, som er lig med den ortogonale projektionsmatrix P_W:

   ☐ $\begin{bmatrix} 29 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\frac{1}{130}\begin{bmatrix} 29 & 2 & -5 \\ 2 & 26 & 10 \\ -5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ ☑ $\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 29 & 2 & -5 \\ 2 & 26 & 10 \\ -5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

2. Marker ortogonalprojektionen $P_W\mathbf{v}$ af vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$ på planen W:

   ☐ $\begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 30 \\ 390 \\ 150 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 1 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix}$

Opgave 8 (8 point)

En drejning/rotation $T\colon \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ i planen om Origo mod uret med en drejningsvinkel $\theta = \frac{\pi}{3}$ har standardmatricen A.

1. Hvilken af de følgende matricer er lig med A?

   ☐ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. Er matricen A regulær/invertibel?

   ☑ Ja ☐ Nej

3. Vektorerne $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ udgør en ordnet basis $\mathcal{B}$ for $\mathcal{R}^2$.
   Hvilken af de følgende matricer svarer til matricen $[T]_{\mathcal{B}}$, som beskriver rotationen T med hensyn til den ordnede basis $\mathcal{B}$?

   ☐ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☑ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Er matricen A diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☑ Nej

Opgave 9 (8 point)

Der er givet en matrix M og en vektor $\mathbf{v}$ ved

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. Vektoren $\mathbf{v}$ er en egenvektor for M. Hvad er den tilhørende egenværdi ?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☑ 4

2. Tallet $\lambda = 1$ er en egenværdi for M. Hvad er dimensionen af det tilhørende egenrum ?

   ☐ 0 ☑ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

3. Angiv determinanten af M:

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☑ 4

4. Er M diagonaliserbar ?

   ☐ Ja ☑ Nej

Opgave 10 (6 point)

Her ses på 5×5-matricer A, B som opfylder at $\det A = 2$ og $\det(AB) = -8$.

1. Hvilken værdi har $\det(2A)$?

   ☐ 32 ☐ -4 ☐ -64 ☐ -8 ☑ 64 ☐ -32

2. Hvilken værdi har $\det B^3$?

   ☐ 32 ☐ -4 ☑ -64 ☐ -8 ☐ 64 ☐ -32

3. Hvilken værdi har $\det(B^{-1}A^T)$?

   ☐ -6 ☐ $-\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{3}{2}$ ☑ $-\frac{1}{2}$

Opgave 11 (6 point, med modregning)

For matricerne $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ udregnes deres produkter $C = AB$ og $D = BA$.

Markér de sande blandt de følgende påstande om matricernes indgange c_{ij} i C, henholdsvis d_{ij} i D:

☑ $c_{11} = d_{11}$	☐ $c_{12} = d_{12}$	☐ $c_{13} = d_{13}$
☑ $c_{22} = d_{22}$	☐ $c_{23} = d_{23}$	☑ $c_{33} = d_{33}$

Opgave 12 (6 point, med modregning)

Her ses på matricen $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ og vektorerne $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$, begge i $\mathcal{R}^3$.

Markér de korrekte påstande i listen nedenfor:

☑ $\mathbf{b}$ er indeholdt i søjlerummet Col B.

☑ $\mathbf{c}$ er indeholdt i søjlerummet Col B.

☐ $\mathbf{b}$ er indeholdt i nulrummet Null B.

☐ $\mathbf{c}$ er indeholdt i nulrummet Null B.

☑ Søjlerummet Col B er lig med $\mathcal{R}^3$.

☐ Nulrummet Null B er lig med $\mathcal{R}^3$.

Opgave 13 (8 point, med modregning)

Opgaven tager udgangspunkt i de rumlige vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^3.$$

1. Hvilke af de følgende vektormængder er lineært uafhængige?

☑ $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$	☑ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$	☐ $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$
☐ $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_7$	☑ $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$	☑ $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$

2. Hvilke af de følgende vektormængder udspænder $\mathcal{R}^3$?

☐ $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$	☑ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$	☑ $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$
☐ $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_7$	☑ $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$	☑ $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$

Opgave 14 (6 point, med modregning)

Følgende kommandoer indtastes i MATLABs Command Window:

```
» a = [1; 0; 3; 4];
» b = [2; 2; 6; 2];
» c = [1; 1; 4; 1];
» d = [1; 0; 3; 4];
» e = [4; 4; 12; 4];
» f = [2; 2; 1; 3];
» C = [a b c d e f];
» rref(C);

ans =

 1   0   0   1   0   1
 0   1   0   0   2   3
 0   0   1   0   0  -5
 0   0   0   0   0  -2
```

Markér de korrekte blandt de følgende påstande:

- [ ] `c` er en rækkevektor.
- [ ] `C` er en 6×4 matrix.
- [x] `C` er en 4×6 matrix.
- [x] Man beregner C's nullitet (dimension af Null C) ved at indtaste `» 6 - rank (C);`
- [ ] Man beregner C's nullitet (dimension af Null C) ved at indtaste `» 5 - rank (C);`
- [x] Dimensionen af C's søjlerum er lig med 4.