Reeksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

20. februar 2019 kl. 9:00-13:00

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt. Eksamen afholdes som digital stedprøve.

Tilladte hjælpemidler: Bøger, noter, fotokopier og print.

Ikke tilladt: Elektroniske hjælpemidler såsom lommeregner eller matematik programmer på computeren. Elektroniske dokumenter.

Der henvises i øvrigt til de generelle retningslinjer for afholdelse af eksamen.

Held og lykke!

Opgave 1 (8 point)

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 point). Ved matrixmultiplikation dannes matricen $C = AB$. Hvad er indgangen c_{31}?

- ☐ 0
- ☐ 2
- ☐ -1
- ☐ 1
- ☐ -2
- ☐ 3

(b) (3 point). Sæt $D = A^{-1}$. Hvad er indgangen d_{31}?

- ☐ 0
- ☐ 2
- ☐ -1
- ☐ 1
- ☐ -2
- ☐ 3

(c) (2 point). Endelig dannes matricen $E = DC$ ved matrixmultiplikation. Hvad er indgangen e_{12}?

- ☐ -3
- ☐ 0
- ☐ 4
- ☐ -2
- ☐ 1
- ☐ 5

Opgave 2 (6 point)

Et lineært ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -18 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Markér det rigtige udsagn herunder.

- ☐ Den eneste løsning til systemet er $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 8$.
- ☐ Der er uendelig mange løsninger. En af disse er $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 8$.
- ☐ Den eneste løsning til systemet er $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 6$.
- ☐ Der er uendelig mange løsninger. En af disse er $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 6$.
- ☐ Ligningssystmet er inkonsistent.
- ☐ Ligningssystemet er konsistent og har ingen frie variable.

Opgave 3 (8 point)

En lineær transformation $T : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$ er bestemt ved

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

(a) (4 point). Hvad er standardmatricen for T?

☐ $\begin{bmatrix}3 & -1\\2 & 3\\-1 & 1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}3 & -1 & -3\\-1 & 4 & -2\end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix}1 & 5 & -1\\2 & 0 & -3\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}1 & 5\\-3 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\-1 & 3 & 1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(b) (2 point). Er T injektiv (én-til-én)?

☐ Ja ☐ Nej

(c) (2 point). Findes der en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$?

☐ Ja ☐ Nej

Opgave 4 (6 point)

En matrix er defineret som

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\\5 & 3 & 2\end{bmatrix}.$$

(a) (3 point). Hvad er matricens egenværdier?

☐ -2, 1 og 4 ☐ -1 og 3

☐ 0, 1 og 2 ☐ $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$ og 2

☐ 0 (med multipliciteten 2) og 5 ☐ der er ingen

(b) (3 point). Er matricen diagonaliserbar?

☐ Ja ☐ Nej

Opgave 5 (6 point)

En matrix er defineret som

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

hvor c er en reel konstant.

(a) (3 point). Hvad er matricens determinant, når $c = 0$?

☐ -16	☐ -11	☐ 3	☐ 12
☐ -12	☐ -8	☐ 6	☐ 13

(b) (3 point). For hvilken værdi af c er matricen ikke inverterbar?

☐ -10	☐ -4	☐ 0	☐ 3
☐ -7	☐ -1	☐ 1	☐ 4

Opgave 6 (5 point)

En matrix Q er bestemt ved

$$Q = b \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ -2 & a & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

hvor a og b er reelle konstanter. Hvilken kombination gør Q til en ortogonal matrix?

☐ $a = 2, b = \frac{1}{3}$	☐ $a = 0, b = \frac{1}{\sqrt{5}}$
☐ $a = 1, b = \frac{1}{2}$	☐ $a = 3, b = \frac{1}{\sqrt{14}}$
☐ $a = -1, b = \frac{1}{2}$	☐ $a = 2, b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Opgave 7 (6 point)

Lad A og B være to 4×4-matricer med determinanter

$$\det(A) = 2, \quad \det(B) = -6.$$

Lad endvidere Q være en ortogonal 4×4-matrix.

(a) (2 point). Hvad er $\det(-A)$?

☐ -12	☐ -6	☐ 2	☐ 10
☐ -10	☐ -2	☐ 6	☐ 12

(b) (2 point). Hvad er $\det(A^{-1}B)$?

☐ -12	☐ -3	☐ 2	☐ 8
☐ -6	☐ -2	☐ 3	☐ 12

(c) (2 point). Hvad er $\det(Q^2 A)$?

☐ -12	☐ -6	☐ 2	☐ 10
☐ -10	☐ -2	☐ 6	☐ 12

Opgave 8 (6 point)

Den lineære afbildning

$$T : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2; \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

beskriver en spejling i en akse, som går gennem origo. Hvilken af følgende vektorer ligger vinkelret på spejlingsaksen?

☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -13 \\ 1 \end{bmatrix}$

Opgave 9 (8 point)

En matrix og en vektor er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -10 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -10 & -10 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Vektoren $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A. Hvad er den tilhørende egenværdi?

☐ -7 ☐ -3 ☐ -2 ☐ 0 ☐ 5

(b) (3 point). Det oplyses, at $\lambda = 3$ er en egenværdi for A. Hvad er dimensionen af det tilhørende egenrum?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 7

(c) (3 point). Er A diagonaliserbar?

☐ Ja ☐ Nej

Opgave 10 (10 point)

En plan W i $\mathcal{R}^3$ er bestemt ved ligningen $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$. Desuden er en vektor givet som

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) (7 point). Markér den ortogonale projektionsmatrix P_W herunder.

☐ $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 11 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ☐ $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & -6 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ ☐ $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

☐ $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ ☐ $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) (3 point). Hvad er afstanden fra $\mathbf{u}$ til W?

☐ $\sqrt{14}$ ☐ $\sqrt{10}$ ☐ 8

☐ 5 ☐ $\sqrt{3}$ ☐ $\sqrt{11}$

Opgave 11 (8 point)

Lad $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, hvor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

(a) (3 point). Hvad er dimensionen af W?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(b) (5 point). Hvilken af følgende vektorer ligger *ikke* i W?

☐ $\begin{bmatrix}3\\-1\\3\\3\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

Opgave 12 (10 point)

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ være basen for $\mathcal{R}^2$ med

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Lad desuden $T : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ være den lineære transformation, hvis matrix repræsentation relativt til $\mathcal{B}$ er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}.$$

(a) (7 point). Hvad er standardmatricen A for T?

☐ $\begin{bmatrix}1 & 4\\-1 & 11\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}0 & 2\\-7 & 1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}3 & 9\\-1 & 0\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 10\end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix}-4 & 2\\9 & 1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}1 & -4\\4 & 2\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}-1 & -6\\3 & 8\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}-3 & 1\\12 & -5\end{bmatrix}$

(b) (3 point). Markér det rigtige udsagn herunder.

☐ A er både diagonaliserbar og inverterbar.

☐ A har ingen egenværdier.

☐ A er inverterbar, men ikke diagonaliserbar.

☐ $\det(A) = 8$

Opgave 13 (8 point)

En matrix er defineret som

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 9 \\ 2 & -1 & -5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Markér en basis for nulrummet $\mathrm{Null}(A)$ herunder.

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Opgave 14 (5 point)

I MATLABs Command Window indtastes følgende:

```
>> t = pi/5;
>> A = [ cos(t) -sin(t) ; sin(t) cos(t) ];
>> det(A)
```

Hvad er MATLABs svar på dette?

☐
```
ans =
       0.6283
```

☐
```
ans =
       0.5000
```

☐
```
ans =
       2.0000
```

☐
```
ans =
       3.1416
```

☐
```
ans =
       1.0000
```

☐
```
ans =
       1.5708
```