

Reeksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

20. februar 2019 kl. 9:00-13:00

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt. Eksamen afholdes som digital stedprøve.

Tilladte hjælpemidler: Bøger, noter, fotokopier og print.

Ikke tilladt: Elektroniske hjælpemidler såsom lommeregner eller matematik programmer på computeren. Elektroniske dokumenter.

Der henvises i øvrigt til de generelle retningslinjer for afholdelse af eksamen.

Held og lykke!

Facit

Opgave 1 (8 point)

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 point). Ved matrixmultiplikation dannes matricen $C = AB$. Hvad er indgangen c_{31} ?

- 0 2 -1
 1 -2 3

(b) (3 point). Sæt $D = A^{-1}$. Hvad er indgangen d_{31} ?

- 0 2 -1
 1 -2 3

(c) (2 point). Endelig dannes matricen $E = DC$ ved matrixmultiplikation. Hvad er indgangen e_{12} ?

- 3 0 4
 -2 1 5

Opgave 2 (6 point)

Et lineært ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -18 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Markér det rigtige udsagn herunder.

- Den eneste løsning til systemet er $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 8$.
 Der er uendelig mange løsninger. En af disse er $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 8$.
 Den eneste løsning til systemet er $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 6$.
 Der er uendelig mange løsninger. En af disse er $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 6$.
 Ligningssystemet er inkonsistent.
 Ligningssystemet er konsistent og har ingen frie variable.

Opgave 3 (8 point)

En lineær transformation $T : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^2$ er bestemt ved

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (4 point). Hvad er standardmatricen for T ?

$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) (2 point). Er T injektiv (én-til-én)?

Ja

Nej

(c) (2 point). Findes der en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$?

Ja

Nej

Opgave 4 (6 point)

En matrix er defineret som

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 point). Hvad er matrixens egenverdier?

$-2, 1$ og 4

-1 og 3

$0, 1$ og 2

$\frac{5}{3}, \frac{3}{2}$ og 2

0 (med multipliciteten 2) og 5

der er ingen

(b) (3 point). Er matrixen diagonaliserbar?

Ja

Nej

Opgave 5 (6 point)

En matrix er defineret som

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

hvor c er en reel konstant.

(a) (3 point). Hvad er matrixens determinant, når $c = 0$?

- | | | | |
|---|------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> -16 | <input type="checkbox"/> -11 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 12 |
| <input checked="" type="checkbox"/> -12 | <input type="checkbox"/> -8 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 13 |

(b) (3 point). For hvilken værdi af c er matricen ikke inverterbar?

- | | | | |
|------------------------------|-----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> -10 | <input type="checkbox"/> -4 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 3 |
| <input type="checkbox"/> -7 | <input type="checkbox"/> -1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 |

Opgave 6 (5 point)

En matrix Q er bestemt ved

$$Q = b \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ -2 & a & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

hvor a og b er reelle konstanter. Hvilken kombination gør Q til en ortogonal matrix?

- | | |
|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> $a = 2, b = \frac{1}{3}$ | <input type="checkbox"/> $a = 0, b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ |
| <input type="checkbox"/> $a = 1, b = \frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> $a = 3, b = \frac{1}{\sqrt{14}}$ |
| <input type="checkbox"/> $a = -1, b = \frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> $a = 2, b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ |

Opgave 7 (6 point)

Lad A og B være to 4×4 -matricer med determinanter

$$\det(A) = 2, \quad \det(B) = -6.$$

Lad endvidere Q være en ortogonal 4×4 -matrix.

(a) (2 point). Hvad er $\det(-A)$?

- | | | | |
|------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> -12 | <input type="checkbox"/> -6 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 10 |
| <input type="checkbox"/> -10 | <input type="checkbox"/> -2 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 12 |

(b) (2 point). Hvad er $\det(A^{-1}B)$?

- | | | | |
|------------------------------|--|----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> -12 | <input checked="" type="checkbox"/> -3 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 8 |
| <input type="checkbox"/> -6 | <input type="checkbox"/> -2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 12 |

(c) (2 point). Hvad er $\det(Q^2A)$?

- | | | | |
|------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> -12 | <input type="checkbox"/> -6 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 10 |
| <input type="checkbox"/> -10 | <input type="checkbox"/> -2 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 12 |

Opgave 8 (6 point)

Den lineære afbildning

$$T : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2; \quad T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

beskriver en spejling i en akse, som går gennem origo. Hvilken af følgende vektorer ligger vinkelret på spejlingsaksen?

- | | | | | |
|---|--|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} -13 \\ 1 \end{bmatrix}$ |
|---|--|---|---|---|

Opgave 9 (8 point)

En matrix og en vektor er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -10 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -10 & -10 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Vektoren \mathbf{v} er en egenvektor for A . Hvad er den tilhørende egen-værdi?

- 7 -3 -2 0 5

(b) (3 point). Det oplyses, at $\lambda = 3$ er en egen-værdi for A . Hvad er dimensio-nen af det tilhørende egenrum?

- 0 1 2 3 7

(c) (3 point). Er A diagonaliserbar?

- Ja Nej

Opgave 10 (10 point)

En plan W i \mathcal{R}^3 er bestemt ved ligningen $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$. Desuden er en vektor givet som

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) (7 point). Markér den ortogonale projektionsmatrix P_W herunder.

- $\frac{1}{13} \begin{bmatrix} 11 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 13 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & -6 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) (3 point). Hvad er afstanden fra \mathbf{u} til W ?

- $\sqrt{14}$ $\sqrt{10}$ 8
 5 $\sqrt{3}$ $\sqrt{11}$

Opgave 11 (8 point)

Lad $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, hvor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 point). Hvad er dimensionen af W ?

- 0 1 2 3 4

(b) (5 point). Hvilken af følgende vektorer ligger *ikke* i W ?

- $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Opgave 12 (10 point)

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ være basen for \mathcal{R}^2 med

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Lad desuden $T : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ være den lineære transformation, hvis matrixrepræsentation relativt til \mathcal{B} er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) (7 point). Hvad er standardmatricen A for T ?

- $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$

(b) (3 point). Markér det rigtige udsagn herunder.

- A er både diagonaliserbar og inverterbar.
 A har ingen egenverdier.
 A er inverterbar, men ikke diagonaliserbar.
 $\det(A) = 8$

Opgave 13 (8 point)

En matrix er defineret som

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 9 \\ 2 & -1 & -5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Markér en basis for nulrummet $\text{Null}(A)$ herunder.

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Opgave 14 (5 point)

I MATLABs Command Window indtastes følgende:

```
>> t = pi/5;  
>> A = [ cos(t) -sin(t) ; sin(t) cos(t) ];  
>> det(A)
```

Hvad er MATLABs svar på dette?

ans = 0.6283

ans = 0.5000

ans = 2.0000

ans = 3.1416

ans = 1.0000

ans = 1.5708