*To find the English version of the exam, please read from the other end!*

*Se venligst bort fra den engelske version på modsatte side hvis du følger denne danske version af prøven.*

# Eksamen i Lineær Algebra

**Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet**

## 22. august 2017, 9:00 – 13:00

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point.
Hele opgavesættet svarer til 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv.
Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i dette opgavesæt.
Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.
Opgaverne 3.2, 4, 8, 11, 12 og 13 kan have mere end et korrekt svar og evalueres der efter følgende princip:
Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.
Sæt kryds ved det hold du deltager i.

Held og lykke!

NAVN:____________________________________

STUDIENUMMMER:____________________________________

| | | |
|---|---|---|
| ☐ | Hold 1: BIO – BIOT – KEMI – KEMT – MILT – MP | Nikolaj Hess-Nielsen |
| ☐ | Hold 2: BA – EGI – FYS – NANO | Jacob Broe |
| ☐ | Hold BA – EN – KBT – MK (Esbjerg) | Ulla Tradsborg |
| ☐ | Hold CBT – ED (Esbjerg) | Ulla Tradsborg |

## Opgave 1 (5 point)

1. Hvad er determinanten af matricen $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

   ☐ 15 ☐ 13 ☐ 11 ☐ -13 ☐ -7

2. En $3 \times 3$ matrix $B$ har determinant $-2$.
   Hvilket af følgende tal svarer til determinanten af den inverse matrix $B^{-1}$?

   ☐ $-2$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ 2
   ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{1}{8}$ ☐ intet af dem

## Opgave 2 (8 point)

1. Er ligningssystemet

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & & = & 0 \\ x_1 & +8x_2 & -3x_3 & = & 3 \end{array}$$

   konsistent?

   ☐ Ja ☐ Nej

2. Hvor mange løsninger har ligningssystemet?

   ☐ 1 ☐ ingen
   ☐ 2 ☐ uendelig mange

3. Er ligningssystemet

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & & = & 1 \\ x_1 & +8x_2 & -3x_3 & = & 3 \end{array}$$

   konsistent?

   ☐ Ja ☐ Nej

4. Hvor mange løsninger har ligningssystemet?

   ☐ 1 ☐ ingen
   ☐ 4 ☐ uendelig mange

## Opgave 3 (11 point)

Opgaven tager udgangspunkt i matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilket af de følgende polynomier er $A$'s karakteristiske polynomium?

   ☐ $2\lambda^2 - 8\lambda + 6$ ☐ $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 11\lambda + 4$

   ☐ $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$ ☐ intet af dem

2. Hvilke af de følgende vektorer er egenvektorer til matricen $A$?

   ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Er matricen $A$ diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

4. Hvilket af de følgende tal svarer til $\det(A)$?

   ☐ 0 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8 ☐ -6

5. Er matricen $A$ regulær/invertibel?

   ☐ Ja ☐ Nej

## Opgave 4 (6 point)

Med udgangspunkt i matricerne $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dannes matrix produkterne $C = AB$ og $D = BA$.

Markér de sande blandt de følgende påstande om matricernes indgange $c_{ij}$ i $C$ hhv. $d_{ij}$ i $D$:

☐ $c_{11} = d_{11}$ ☐ $c_{13} = d_{13}$ ☐ $c_{23} = d_{23}$

☐ $c_{12} = d_{12}$ ☐ $c_{22} = d_{22}$ ☐ $c_{33} = d_{33}$

## Opgave 5 (9 point)

En $3 \times 3$-matrix $A = [\mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_2 \; \mathbf{a}_3]$ har tre indbyrdes ortogonale søjlevektorer
$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ a_{32} \end{bmatrix}$ og $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$.

1. Hvad er de korrekte værdier for $a_{32}, a_{23}$ og $a_{33}$?

   ☐ $a_{32} = a_{23} = a_{33} = -2$ ☐ $a_{32} = 1, a_{23} = 2, a_{33} = -2$
   
   ☐ $a_{32} = a_{33} = -2, a_{23} = 2$ ☐ $a_{32} = a_{33} = -2, a_{23} = 1$

2. Hvilken af de følgende matricer svarer til produktet $AA^T$?

   ☐ $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

   ☐ $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

3. Hvad er determinanten $\det(A)$?

   ☐ 1 ☐ 9 ☐ 27 ☐ 729

## Opgave 6 (8 point)

I planen er der givet en linje $l$ ved ligningen $3x_1 + 4x_2 = 0$ og en vektor
$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}$.

1. Hvilken af de følgende vektorer fås som resultat af ortogonalprojektionen af vektoren $\mathbf{v}$ på linjen $l$?

   ☐ $\begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -12 \\ 9 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -300 \\ 225 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{25}{3} \end{bmatrix}$

2. Hvilket af de følgende tal er lig med afstanden fra punktet $P : (0, 25)$ til linjen $l$?

   ☐ 20 ☐ 15 ☐ $\frac{50}{3}$ ☐ $100\sqrt{13}$

## Opgave 7 (8 point)

En drejning/rotation $T : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ i planen om Origo mod uret med en drejningsvinkel $\theta = \frac{\pi}{4}$ har en standardmatrix $A$.

1. Hvilken af de følgende matricer svarer til $A$?

   ☐ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. Er matricen $A$ regulær/invertibel?

   ☐ Ja ☐ Nej

3. Er matricen $A$ diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

4. Vektorerne $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ udgør en ordnet basis $\mathcal{B}$ for $\mathcal{R}^2$.
   Hvilken af de følgende matricer svarer til matricen $T_{\mathcal{B}}$ som beskriver rotationen $T$ med hensyn til den ordnede basis $\mathcal{B}$?

   ☐ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

## Opgave 8 (8 point)

Opgaven tager udgangspunkt i de rumlige vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^3.$$

1. Hvilke af de følgende vektormængder udspænder $\mathcal{R}^3$?

   ☐ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ☐ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ☐ $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$

   ☐ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_7$ ☐ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_6$ ☐ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$

2. Hvilke af de følgende vektormængder er lineært uafhængige?

   ☐ $\mathbf{v}_1$ ☐ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_7$ ☐ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$

   ☐ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ☐ $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$ ☐ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$

## Opgave 9 (6 point)

Opgaven tager udgangspunkt i ligningssystemet

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \end{array}.$$

1. Hvilken af de følgende matricer svarer til den udvidede matrix/totalmatrix $[A\ \mathbf{b}]$ som beskriver ligningssystemet?

   ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

   ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

2. Hvilken af de følgende matricer er den reducerede echelonmatrix/trappematrix som er rækkeækvivalent med $[A\ \mathbf{b}]$?

   ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

   ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Hvilken af de følgende påstande er sand?

   ☐ Systemet er inkonsistent.

   ☐ $x_1 = 7, x_2 = -3, x_3 = -2$ er en blandt flere af systemets løsninger.

   ☐ $x_1 = 7, x_2 = -3, x_3 = -2$ er systemets eneste løsning.

   ☐ $x_1 = 6, x_2 = -2, x_2 = -2$ er en blandt flere af systemets løsninger.

   ☐ $x_1 = 6, x_2 = -2, x_3 = -2$ er systemets eneste løsning.

## Opgave 10 (5 point)

Denne opgave tager udgangspunkt i de tre elementære matricer

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ samt matricen } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

For hvilken af de tre matricer $E_i,\ 1 \leq i \leq 3$, gælder det at

1. $E_i A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$?

   ☐ $E_1$ ☐ $E_2$ ☐ $E_3$

2. $E_i A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$?

   ☐ $E_1$ ☐ $E_2$ ☐ $E_3$

3. $E_i A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$?

   ☐ $E_1$ ☐ $E_2$ ☐ $E_3$

4. Er det sandt at en elementær matrix altid er invertibel/regulær?

   ☐ Ja ☐ Nej

5. Er det sandt at produktet af to elementære matricer altid er elementær?

   ☐ Ja ☐ Nej

## Opgave 11 (8 point)

Vi tager udgangspunkt i en $2 \times 2$ matrix $A$. Markér de korrekte påstande i listen nedenfor:

☐ Hvis $\det(A)$ er et heltal, så er $\det(A^T)$ også et heltal.

☐ Hvis $\det(A)$ er et heltal og $\det A \neq 0$, så er $\det(A^{-1})$ også et heltal.

☐ Hvis $A$ er en drejnings/rotations-matrix, så er $\det(A) = 1$.

☐ Hvis $A$ er en spejlings/refleksions-matrix, så er $\det(A) = 1$.

## Opgave 12 (6 point)

Opgaven tager udgangspunkt i matricen $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ og vektorerne $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^2$ samt $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^3$.

Markér de korrekte påstande i listen nedenfor:

☐ $\mathbf{b}$ er indeholdt i søjlerummet Col $B$.

☐ $\mathbf{c}$ er indeholdt i søjlerummet Col $B$.

☐ $\mathbf{b}$ er indeholdt i nulrummet Null $B$.

☐ $\mathbf{c}$ er indeholdt i nulrummet Null $B$.

☐ Søjlerummet Col $B$ er lig med $\mathcal{R}^2$.

☐ Nulrummet Null $B$ er lig med $\mathcal{R}^3$.

## Opgave 13 (6 point)

Følgende kommandoer indtastes i MATLABs Command Window:

```
>> a = [1; 1; 1; 1];
>> b = [1; 2; 1; 1];
>> c = [1; 0; 3; -4];
>> d = [2; 1; -2; 5];
>> e = [6; -2; 12; -16];
>> C = [a b c d e];
>> rref(C);

ans =

 1   0   0   0    1
 0   1   0   0   -2
 0   0   1   0    5
 0   0   0   1    1
```

Markér de korrekte blandt de følgende påstande:

☐ `e` er en rækkevektor.

☐ `e` er en søjlevektor.

☐ `C` er en $4 \times 5$ matrix.

☐ `C` er en $5 \times 4$ matrix.

☐ Man beregner $C$'s nullitet (dimension af Null $C$) ved at indtaste
`>> 4 - rank (C);`

☐ Man beregner $C$'s nullitet (dimension af Null $C$) ved at indtaste
`>> 5 - rank (C);`

## Problem 14 (6 points)

Vi ser på en udvidet/total- matrix

$$[A\ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilket af de følgende ligningssystemer svarer til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

   ☐ $$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \end{array}$$

   ☐ $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -1 & = & & & x_2 & + & x_3 & & & & \\ 1 & = & 4x_1 & - & 3x_2 & & & + & x_4 & & \\ 1 & = & -2x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 \end{array}$$

   ☐ $$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} -x_1 & & & + & x_2 & + & x_4 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & & & + & x_5 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 0 \end{array}$$

   Når man overfører $[A\ \mathbf{b}]$ på reduceret echelon/trappe-form fås matricen

$$[H\ \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Hvad er rangen af matricen $A$?

   ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

3. Hvad er rangen af den udvidede/total matrix $[A\ \mathbf{b}]$?

   ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

4. Hvad er nulliteten af matricen $A$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

5. Er det sandt at $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 1, x_5 = 1$ løser systemet svarende til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

   ☐ Ja ☐ Nej

6. Er det sandt at $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 1, x_5 = 1$ er eneste løsning til systemet svarende til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

   ☐ Ja ☐ Nej