Reeksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

21. februar 2018

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

Opgave 1 (5 point)

Et ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 7x_3 &= 15 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Markér det rigtige udsagn heunder.

☐ Ligningssystmet har ingen løsninger.

☐ Den eneste løsning til systemet er $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

☐ Der er uendelig mange løsninger. En af disse er $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

☐ Løsningsmængden til systemet udgør et underrum af $\mathcal{R}^3$.

Opgave 2 (6 point)

Lad W være underrummet af $\mathcal{R}^4$ med basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, hvor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ved at bruge Gram-Schmidt processen på vektorerne $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, finder man vektorerne $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, som udgør en ortogonal basis for W. Her er $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. Hvad er vektoren $\mathbf{v}_2$?

☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Opgave 3 (7 point)

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 9 & 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Fra disse dannes matricerne $C = AB$ og $D = A^{-1}B$.

(a) (2 point). Hvad er størrelsen af matrix C?

☐ 4×3 ☐ 3×3 ☐ 4×4 ☐ 3×4 ☐ 3×7

(b) (2 point). Hvad er indgangen c_{13}?

☐ 1 ☐ -1 ☐ 8 ☐ 2 ☐ 4

(c) (3 point). Hvad er indgangen d_{13}?

☐ 0 ☐ 1 ☐ -2 ☐ 7 ☐ 9

Opgave 4 (8 point)

Lad $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, hvor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 point). Hvad er dimensionen af W?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 12

(b) (5 point). Hvilken af følgende vektorer ligger i W?

☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Opgave 5 (6 point)

En matrix er givet som

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) (4 point). Hvad er determinanten af A?

☐ -3 ☐ 1 ☐ 0 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 11

(b) (2 point). Er A en inverterbar matrix?

☐ Ja ☐ Nej

Opgave 6 (10 point)

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ være basen for $\mathcal{R}^2$ med $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Lad desuden $T : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ være en lineær transformation. Standard matricen for T er

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) (7 point). Hvad er matrix repræsentationen $[T]_{\mathcal{B}}$ af T relativt til basen $\mathcal{B}$?

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(b) (3 point). Hvad er egenværdierne for T?

☐ -1 og 1 ☐ -2 og 1
☐ 2 og 5 ☐ Der er ingen

Opgave 7 (10 point)

Lad $T : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ være en lineær transformation med standard matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Hvad er værdien af n?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(b) (2 point). Hvad er værdien af m?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(c) (2 point). Er T injektiv (en-til-en)?

☐ Ja ☐ Nej

(d) (2 point). Er T surjektiv (på)?

☐ Ja ☐ Nej

(e) (2 point). Findes der en ikke-nul vektor **u** således at $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$?

☐ Ja ☐ Nej

Opgave 8 (5 point)

Betragt matricen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Hvad er dens egenværdier?

☐ -1 og 3
☐ 2 og 3
☐ -2 og 5
☐ 1 og -1
☐ 3 med multipliciteten 2
☐ Der er ingen

Opgave 9 (10 point)

En matrix er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Besvar spørgsmålene herunder. (*Bemærk: I spørgsmål (a) og (b) ophæver hver forkert afkrydsning én rigtig afkrydsning.*)

(a) (3 point). Hvilke af følgende vektorer er egenvektorer for A?

☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}$

(b) (3 point). Hvilke af følgende tal er egenværdier for A?

☐ -2 ☐ -1 ☐ 0 ☐ 2 ☐ 4

(c) (2 point). Er A diagonaliserbar?

☐ Ja ☐ Nej

(d) (2 point). Er A inverterbar?

☐ Ja ☐ Nej

Opgave 10 (6 point)

Lad A, B og C være 5×5-matricer med $\det(A) = -1$, $\det(B) = 2$ og $\det(C) = 7$.

(a) (2 point). Hvad er $\det(A^5)$?

☐ -5 ☐ 5 ☐ 0 ☐ -1 ☐ 1 ☐ 25

(b) (2 point). Hvad er $\det(A^T BC)$?

☐ 8 ☐ -14 ☐ 10 ☐ 9 ☐ 0 ☐ -9

(c) (2 point). Hvad er $\det(3A)$?

☐ -3 ☐ -9 ☐ 9 ☐ -15 ☐ 22 ☐ -243

Opgave 11 (12 point)

Tre vektorer er er givet ved

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\0\\2\\2\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix}4\\2\\4\\7\\3\end{bmatrix},$$

og et underrum er defineret som $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(a) (2 point). Hvad er prik-produktet $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2$?

☐ -2 ☐ 0 ☐ 3 ☐ 5 ☐ -8

(b) (2 point). Hvad er dimensionen af W?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

(c) (2 point). Hvad er dimensionen af $W^\perp$?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

(d) (3 point). Hvad er den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W?

☐ $\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\3\\4\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}2\\1\\4\\-3\\0\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}3\\0\\1\\6\\1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}2\\0\\6\\4\\4\end{bmatrix}$

(e) (3 point). Hvad er den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på $W^\perp$?

☐ $\begin{bmatrix}2\\2\\-2\\3\\-1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}4\\-3\\2\\0\\2\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}3\\2\\-4\\1\\1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}5\\0\\1\\-2\\4\end{bmatrix}$

Opgave 12 (7 point)

En matrix er definiert som

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Hvad er dimensionen af nulrummet Null(A)?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 8

(b) (5 point). Hvilken af følgende mængder udgør en basis for Null(A)?

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$

Opgave 13 (4 point)

En liste af vektorer er givet ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hvilke af følgende mængder er lineært uafhængige? (*Bemærk: I denne opgave ophæver hver forkert afkrydsning én rigtig afkrydsning.*)

☐ $\{\mathbf{v}_2\}$

☐ $\{\mathbf{v}_5\}$

☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$

☐ $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5\}$

☐ $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$

☐ $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

Opgave 14 (4 point)

En liste af vektorer er givet som

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \\ -21 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Man vil gerne skrive $\mathbf{w}$ som en linearkombination af vektorerne $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$. Følgende indtastes i MATLABs Command Window:

```
>> A = [1 2 3 2 7; 2 0 3 9 4; 3 -1 1 6 4; -1 9 0 10 -21; 5 7 8 3 24];
>> rref(A)

ans =

 1   0   0   0    2
 0   1   0   0   -1
 0   0   1   0    3
 0   0   0   1   -1
 0   0   0   0    0
```

Hvordan kan $\mathbf{w}$ skrives som en linearkombination af $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$?

☐ $\mathbf{w} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$

☐ $\mathbf{w} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$

☐ $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$

☐ $\mathbf{w}$ kan ikke skrives som en linearkombination af vektorerne $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$.