

Reeksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

19. august, 2016. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 11 nummererede sider med ialt 14 opgaver. Alle opgaver er "multiple choice" opgaver. **Besvarelsen skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på besvarelsen.

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

I alle opgaver gælder at der kun er ét korrekt svar til hvert spørgsmål.

Opgave 1 (4 %)

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hvad er determinanten af A ?

- 12 10 5 0 -5 -10 -12

Opgave 2 (4 %)

Lad A være en 4×6 matrix og lad $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hvordan fremkommer matrixen EA fra A ?

- Ved at transponere matrixen.
 Ved at ombytte række 1 og række 3.
 Ved at ombytte række 2 og række 4.
 Ved at addere række 2 til række 4 og addere række 4 til række 2.

Opgave 3 (10 %)

Matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

har reduceret trappeform (reduceret række echelon form)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilken af følgende er en basis for søjlerummet af A (Col A)?

- $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

2. Hvilken af følgende er en basis for rækkerummet af A (Row A)?

- $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

3. Hvilken af følgende er en basis for nulrummet af A (Null A)?

- $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Opgave 4 (10 %)

Lad W være et underrum af \mathbb{R}^4 som opfylder at

$$W^\perp = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ og lad } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilken af følgende er en basis for W

$$\inputcheckbox \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \inputcheckbox \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \quad \inputcheckbox \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Lad nu \mathbf{w} være den ortogonale projektion af \mathbf{u} på W . Hvad er 4. komponenten af \mathbf{w} (dvs. w_4)

$$\inputcheckbox -2 \quad \inputcheckbox -1 \quad \inputcheckbox 0 \quad \inputcheckbox 1 \quad \inputcheckbox 2 \quad \inputcheckbox 4$$

3. Lad \mathbf{z} være ortogonal projektionen af \mathbf{u} på W^\perp . Hvad er 4. komponenten af \mathbf{z} (dvs. z_4)?

$$\inputcheckbox -2 \quad \inputcheckbox -1 \quad \inputcheckbox 0 \quad \inputcheckbox 1 \quad \inputcheckbox 2 \quad \inputcheckbox 4$$

Opgave 5 (4 %)

Lad $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ være en matrix med 2 rækker og lad $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4]$ være en matrix som opfylder at produktet $C = AB$ er defineret.

1. Hvor mange rækker har matricen B ?

- 2
 3
 4
 Antal rækker i B kan ikke bestemmes fra det oplyste.

2. Hvor mange rækker har matricen C ?

- 2
 3
 4
 Antal rækker i C kan ikke bestemmes fra det oplyste.

Opgave 6 (10 %)

Det karakteristiske polynomium af

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

er $-(t+1)(t^2 - 6t + 2)$.

1. Hvilken af følgende er en egenværdi for A ?

-1

1

2

6

2. Hvilken af følgende er en egenvektor for A ?

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Kan A diagonaliseres?

Ja

Nej

4. Har A en invers matrix?

Ja

Nej

Opgave 7 (8 %)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Lad a være et positivt tal, der opfylder at $Q = aA$ er en ortogonal matrix. Hvad er værdien af a ?

- 1 2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$ 9

2. Lad nu c være et tal der opfylder at $A^{-1} = cA^T$. Hvad er værdien af c ?

- 1 2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$ 9

Opgave 8 (8 %)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 5 & -4 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

1. Er \mathbf{v} indeholdt i Col A ?

- Ja Nej

2. Er \mathbf{v} indeholdt i Null B ?

- Ja Nej

3. Lad $C = AB$. Hvad er værdien af c_{22} ?

- 6 -4 -2 -1 2 4

Opgave 9 (8 %)

1. Hvor mange løsninger har ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\2x_2 + 2x_4 &= 2 \\x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3\end{aligned}$$

- ingen
- én
- to
- uendeligt mange.

2. Hvad er nulliteten af koefficientmatricen?

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

3. Hvad er rangen af koefficientmatricen?

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

Opgave 10 (4 %)

Lad A betegne matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 13 & 17 & 19 \\ 9 & 29 & 31 & 37 \end{bmatrix},$$

og lad B være en matrix på trappeform (række echelon form), der er fremkommet fra A ved et antal elementære rækkeoperationer. Hvad er værdien af b_{32} ?

- 2
- 0
- 1
- 3
- 6
- Værdien kan ikke bestemmes fra det oplyste.

Opgave 11 (5 %)

Lad A være en 3×2 matrix forskellig fra nulmatricen.

1. Hvad er den mindst mulige rang af $A^T A$?

- 0 1 2 3

2. Hvad er den størst mulige rang af $A^T A$?

- 0 1 2 3

3. Hvad er den størst mulige rang af AA^T ?

- 0 1 2 3

Opgave 12 (11 %)

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

og lad $B = A^{-1}$. Lad desuden C være en 4×4 matrix med $\det C = 4$.

1. Hvad er værdien af b_{41} ?

- 0 1 2 $\frac{1}{2}$ -2 6 $\frac{1}{6}$

2. Hvad er determinanten af A ?

- 2 1 6 12 14 18 72

3. Hvad er determinanten af $A^T C$?

- 8 1 3 12 16 48 72

4. Hvad er determinanten af AC^{-1} ?

- 8 1 3 12 16 48 72

5. Hvad er determinanten af $-2C$?

- 64 -8 -4 -2 2 8 64

Opgave 13 (8 %)

Lad $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en lineær transformation med standardmatrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Hvad er værdien af m ?

- 0 1 2 3 4 5 6

2. Hvad er værdien af n ?

- 0 1 2 3 4 5 6

3. Er T surjektiv (engelsk: onto)?

- Ja Nej

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af T ?

- 0 1 2 3 4 5 6

Opgave 14 (6 %)

Følgende indtastes i Matlabs command window:

```
>> A=[2 0 1; -1 2 1; 1 2 2; 1 0 0];  
>> b=[2; 1; 3; 0];  
>> rref([A b])
```

ans =

```
1.0000    0    0    0  
0    1.0000    0   -0.5000  
0    0    1.0000    2.0000  
0    0    0    0
```

```
>> linsolve(A,b)
```

Hvad er Matlabs svar på sidstnævnte kommando?

Matrix is singular to working precision.

ans =

```
2.0000  
1.0000  
3.0000  
0
```

ans =

```
0.0000  
-0.5000  
2.0000  
0
```

ans =

```
0.0000  
-0.5000  
2.0000
```