

Eksamen i Lineær Algebra

Første studieår ved Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet samt
Det Tekniske Fakultet for IT og Design

17. februar, 2017, 9.00-13.00

Nærværende eksamenssæt består af 9 nummererede sider med ialt 14 opgaver. Alle opgaver er "multiple choice" opgaver. **Besvarelsen skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på besvarelsen.

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

I alle opgaver gælder at der kun er ét korrekt svar til hvert spørgsmål.

Opgave 1 (9%)

Betragt matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og besvar følgende spørgsmål.

1. Er A på trappeform (række echelon form)?

Ja

Nej

2. Er B på trappeform (række echelon form)?

Ja

Nej

3. Er A på reduceret trappeform (reduceret række echelon form)?

Ja

Nej

4. Er B på reduceret trappeform (reduceret række echelon form)?

Ja

Nej

5. Kan B fremkomme fra A ved elementære rækkeoperationer?

Ja

Nej

6. Kan A fremkomme fra B ved elementære rækkeoperationer?

Ja

Nej

Opgave 2 (4 %)

Lad $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]$ være en matrix med 4 rækker og lad $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4 \ \mathbf{b}_5]$ være sådan at $C = AB$ er defineret.

1. Hvor mange rækker er der i matrixen B ?

- 2 3 4 5

2. Hvor mange rækker er der i matrixen C ?

- 2 3 4 5

Opgave 3 (10 %)

Lad $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ og lad $B = \frac{1}{5}A$.

1. Besvar følgende sand/falsk opgaver.

A er en ortogonal matrix. Sand Falsk

B er en ortogonal matrix. Sand Falsk

A er en symmetrisk matrix. Sand Falsk

$B^{-1} = -B$ Sand Falsk

$B^{-1} = B$ Sand Falsk

2. Hvad er determinanten af B ?

- 5 -1 0 2 5

3. Lad $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ være en egenvektor for B med egenværdi 1. Hvad er værdien af x_1 hvis $x_2 = 1$.

- 3 -1 0 1 3

Opgave 4 (10 %)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Totalmatricen $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ har følgende reducede trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Besvar de følgende opgaver om pivotsøjler i A :

Søjle 1 er en pivotsøjle. Sand Falsk

Søjle 2 er en pivotsøjle. Sand Falsk

Søjle 3 er en pivotsøjle. Sand Falsk

Søjle 4 er en pivotsøjle. Sand Falsk

2. Hvad er rangen af A ?

- 0 1 2 3 4 5

3. Hvad er nulliteten af A ?

- 0 1 2 3 4

4. Lad \mathbf{x} være en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hvad er x_2 ?

- 1
 2
 3
 x_2 er en fri variabel.

Opgave 5 (4 %)

Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Lad $C = AB$. Hvad er tallet c_{13} ?

- 7 -5 -3 8 11

Opgave 6 (10 %)

Lad $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og lad $W = \text{Span}\{\mathbf{v}\}$. Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og lad \mathbf{w} være ortogonal-projektionen af \mathbf{u} på W .

1. Hvad er tredje komponenten af \mathbf{w} (dvs. w_3)?

- 4 -2 -1 0 1 4

2. Lad \mathbf{z} være ortogonal-projektionen af \mathbf{u} på W^\perp . Hvad er tredje komponenten af \mathbf{z} (dvs. z_3)?

- 2 -1 2 3 4 6

3. Hvad er dimensionen af W^\perp ?

- 0 1 2 3 4 5

Opgave 7 (6 %)

Lad A og B være 3×3 matricer med $\det A = 5$ og $\det B = 3$.

1. Hvad er $\det(-2A)$?

- 200 -50 -40 -10 5 40

2. Hvad er $\det AB^T$?

- 2 3 5 15 $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{3}$

3. Hvad er $\det AB^{-1}$?

- 1 $\frac{1}{15}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{3}$ 2 15

Opgave 8 (10 %)

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 4 & -2 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ -7 & 4 & -2 & 9 \end{bmatrix} \text{ har karakteristisk polynomium } t(t-2)(t+1)^2.$$

1. Hvilket af følgende tal er en egenværdi for A ?

- 2 -1 1 4

2. Hvilken af følgende vektorer er en egenvektor for A ?

- $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Har A en invers matrix?

- Ja Nej

Opgave 9 (4 %)

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Hvad er determinanten af A ?

- 12 10 5 0 -5 -10 -12

Opgave 10 (4 %)

Hvor mange løsninger har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

- 0
 1
 uendeligt mange.

Opgave 11 (6%)

Lad T være den lineære transformation med standard matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for \mathcal{R}^2 .

Hvilken af følgende matricer er matrix repræsentationen af T med hensyn til \mathcal{B} , altså $[T]_{\mathcal{B}}$?

- $\begin{bmatrix} -18 & -7 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 11 & -18 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -7 & -18 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 11 & -18 \end{bmatrix}$

Opgave 12 (10%)

Lad $T : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$ være den lineære transformation med standard matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Hvad er værdien af n ?

 2

 3

 4

 5

 6

2. Hvad er værdien af m ?

 2

 3

 4

 5

 6

3. Hvad er rangen af A ?

 2

 3

 4

 5

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af T ?

 0

 1

 2

 3

 4

 5

5. Er T enentydig (en-til-en, injektiv)?

 Ja

 Nej

6. Er T på (surjektiv)?

 Ja

 Nej

Opgave 13 (6%)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ og lad $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. Er \mathbf{b} indeholdt i Col A ? Ja Nej
2. Er \mathbf{c} indeholdt i Col A ? Ja Nej
3. Er \mathbf{b} indeholdt i Null A ? Ja Nej
4. Er \mathbf{c} indeholdt i Null A ? Ja Nej

Opgave 14 (7%)

Følgende kommandoer indtastes i MATLABs Command Window:

```
>> A = [1 1 1 1; 1 2 3 4; 0 1 0 1; 0 0 0 1];
```

```
>> b = [1; 0; 1; 2];
```

```
>> T = [A b];
```

1. Hvad er størrelsen af matricen T ?
 1×20 2×16 4×4 4×5 5×4
2. Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning \mathbf{x} . Hvilken af følgende kombinationer af MATLAB kommandoer beregner \mathbf{x} ?
 `>> R = rref(A); x = R(:,4)`
 `>> R = rref(A); x = R(5,:)`
 `>> R = rref(T); x = R(:,4)`
 `>> R = rref(T); x = R(:,5)`
 `>> R = rref(T); x = R(5,:)`