

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

14. juni 2019, 9:00 – 13:00

Eksamenssættet består af 11 nummererede sider med 12 afkrydsningsopgaver. For hvert opgave er der angivet et antal point; delspørgsmålene vægtes ligeligt inden for hver opgave.

Hele opgavesættet svarer til 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv.

Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses digitalt i moodle.

Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

I opgaverne 10, 11 og 12 evalueres der efter følgende princip:

Hver forkert afkrydsning ophæver (modregnes i) én rigtig afkrydsning.

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

Opgave 1 (8 point)

Opgaven tager udgangspunkt i ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -6 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 9\end{aligned}$$

1. Angiv hvilken af matricerne nedenfor, der svarer til ligningssystemets udvidede koefficientmatrix/totalmatrix $[A \mathbf{b}]$?

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

2. Hvilken af de følgende matricer er den reducerede echelonmatrix/trappematrix, som er rækkeækvivalent med $[A \mathbf{b}]$?

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Hvilken af de følgende påstande er sand?

Systemet er inkonsistent.

$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$ er en blandt flere af systemets løsninger.

$x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 0$ er systemets eneste løsning.

$x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 0$ er systemets eneste løsning.

$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = 0$ er en blandt flere af systemets løsninger.

$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = 0$ er systemets eneste løsning.

4. Marker de sande udsagn blandt de følgende påstande:

Vektoren $\mathbf{w} = (-5, -4, 0)$ er ikke en løsning til ligningssystemet.

Vektoren $\mathbf{w} = (-5, -4, 0)$ opfylder $\mathbf{w} = A^{-1}\mathbf{b}$ for $\mathbf{b} = (3, -6, 9)$.

Vektoren $\mathbf{w} = (-5, -4, 0)$ løser $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, men den er ikke lig med $A^{-1}\mathbf{b}$.

Koefficientmatricen A er ikke inverterbar.

Opgave 2 (8 point)

Her ses på $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

1. Er \mathbf{b} indeholdt i søjlerummet $\text{Col } A$?

Ja

Nej

2. Er $A \cdot \mathbf{c}$ indeholdt i søjlerummet $\text{Col } A$?

Ja

Nej

3. Er \mathbf{c} indeholdt i nulrummet $\text{Null } A$?

Ja

Nej

4. Er \mathbf{d} indeholdt i nulrummet $\text{Null } A$?

Ja

Nej

Opgave 3 (8 point)

Her ses på matricerne A og B samt vektoren \mathbf{b} , givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Hvilken af de følgende vektorer stemmer overens med produktet $A\mathbf{b}$?

$\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix}$ ingen af dem

2. Hvilken af de følgende matricer stemmer overens med produktet AB ?

$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 10 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 8 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ ingen af dem

3. Hvilken af de følgende matricer stemmer overens med inversen A^{-1} ?

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -13 & -4 & 7 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -6 & -4 & 7 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ingen af dem

4. Hvilken af de følgende matricer stemmer overens med produktet $A^{-1}B$?

$\begin{bmatrix} -48 & -46 \\ -16 & -13 \\ 24 & 22 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -49 & -47 \\ -15 & -14 \\ 23 & 22 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -49 & -46 \\ -15 & -13 \\ 24 & 22 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -49 & -47 \\ -16 & -14 \\ 23 & 21 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -48 & -46 \\ -15 & -13 \\ 23 & 22 \end{bmatrix}$ ingen af dem

Opgave 4 (8 point)

Her ses på 7×7 -matricer A, B som opfylder at $\det A = -4$ og $\det(AB) = 12$.

1. Hvilken værdi har $\det(\frac{1}{2}A)$?

- -128 -32 $-\frac{1}{32}$ $\frac{1}{32}$ 32 128

2. Hvilken værdi har $\det B$?

- 16 3 2 -2 -3 -16

3. Hvilken værdi har $\det(A^{-1})$?

- $-\frac{1}{512}$ $-\frac{1}{128}$ $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{128}$ $\frac{1}{512}$

4. Hvilken værdi har $\det(B^T(A^{-1})^T)$?

- 12 $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{4}$ $-\frac{3}{4}$ $-\frac{4}{3}$ -12

Opgave 5 (8 point)

Vektorerne $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ udgør en basis \mathcal{B}

for \mathcal{R}^4 . Hvis man anvender Gram-Schmidt processen på \mathcal{B} , så fremkommer der en ortogonal basis bestående af vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og \mathbf{v}_4 . Der gælder:

1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1$ ingen af delene
2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1$ ingen af delene
3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3$ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$
 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{v}_2$ ingen af delene
4. $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4$ $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$
 $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1$ $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 + 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$
 $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ ingen af delene

Opgave 6 (8 point)

I opgaven indgår tre vektorer i \mathcal{R}^3 givet ved

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ t \end{bmatrix}$$

Bemærk at den sidste koordinat t i vektoren \mathbf{c} er et variabelt reelt tal.
Marker de sande udsagn blandt de følgende påstande:

1. \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} er lineært afhængige vektorer for

- $t = 9$ $t = -5$ alle reelle tal t
 $t \neq -9$ $t \neq -5$

2. \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} udspænder \mathcal{R}^3 for

- $t = -9$ $t = -5$ alle reelle tal t
 $t \neq 9$ $t \neq -5$

3. \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} udgør en basis \mathcal{B} for \mathcal{R}^3 for

- $t = 9$ $t = 4$ $t = -4$ alle reelle tal t

4. for $t = 4$ har vektoren $\mathbf{v} = (-1, 4, 2)$ sin \mathcal{B} -koordinatsøjle $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ givet ved

- $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Opgave 7 (8 point)

I rummet \mathcal{R}^3 er der givet en plan W ved ligningen $x_1 + 1x_2 - 2x_3 = 0$.

1. Marker den matrix, som er lig med den ortogonale projektionsmatrix P_W :

- $\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 11 & -2 & 4 \\ -2 & 11 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. Marker orthogonalprojektionen $P_W \mathbf{v}$ af vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ på planen W :

- $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Opgave 8 (8 point)

En lineær transformation $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ har standard matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & -8 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Hvilken værdi har tallet n ?

- 1 2 3 4 5

2. Hvilken værdi har tallet m ?

- 1 2 3 4 5

3. Hvad er rangen af A ?

- 1 2 3 4 5

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af A ?

- 0 1 2 3 4

5. Hvad er dimensionen af søjlerummet af A ?

- 0 1 2 3 4

6. Hvad er dimensionen af nulrummet af den transponerede matrix A^T , dvs. $\dim(\text{Null } A^T)$?

- 0 1 2 3 4

7. Hvad er dimensionen af ortogonalkomplementet til nulrummet af A , dvs. $\dim(\text{Null } A)^\perp$?

- 0 1 2 3 4

8. Hvad er dimensionen af rækkerummet af A , dvs. $\dim(\text{Row } A)$?

- 0 1 2 3 4

Opgave 9 (8 point)

Opgaven vedrører følgende system af ordinære differentialligninger

$$y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t), \quad y_2'(t) = -y_1(t) + 4y_2(t).$$

1. Angiv den matrix, som svarer til systemets koefficientmatrix A :

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

2. Marker mængden af egenverdier for A :

$\{1, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{2\}$ $\{2, 3\}$ $\{2, -3\}$

3. Marker det system af vektorer, der består af egenvektorer for A :

$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Angiv differentialligningssystemets løsningsmængde, idet a og b betegner vilkårlige reelle tal:

$y_1(t) = ae^{2t} + 2be^{3t},$
 $y_2(t) = -ae^{2t} + 4be^{3t}.$

$y_1(t) = 2ae^{2t} + 3be^{3t},$
 $y_2(t) = 2ae^{2t} + 3be^{3t}.$

$y_1(t) = 2ae^{2t} + be^{3t},$
 $y_2(t) = ae^{2t} + be^{3t}.$

$y_1(t) = 2ae^{2t} + be^{3t},$
 $y_2(t) = -ae^{2t} + 4be^{3t}.$

Opgave 10 (8 point, med modregning)

I denne opgave betragtes de følgende 4 vektorer:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Er det sandt, at

1. \mathbf{v}_2 ikke er proportional med \mathbf{v}_1 ?

Ja

Nej

2. \mathbf{v}_2 er en linearkombination af \mathbf{v}_1 ?

Ja

Nej

3. \mathbf{v}_3 er en linearkombination af \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 ?

Ja

Nej

4. \mathbf{v}_4 er en linearkombination af \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 og \mathbf{v}_3 ?

Ja

Nej

5. tre af vektorerne \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 og \mathbf{v}_4 frembringer den fjerde ?

Ja

Nej

6. vektorerne \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 og \mathbf{v}_4 er lineært uafhængige ?

Ja

Nej

7. Enhver vektor \mathbf{w} i \mathcal{R}^4 tilhører underrummet $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$?

Ja

Nej

8. den lineære operator T på \mathcal{R}^4 med standardmatricen $A = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4]$ er surjektiv ?

Ja

Nej

Opgave 11 (8 point, med modregning)

I denne opgave betragtes de følgende 4 matricer:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Er det sandt, at

1. A og B er inverse til hinanden?

Ja

Nej

2. C og D er inverse til hinanden?

Ja

Nej

3. A er inverterbar?

Ja

Nej

4. B er diagonaliserbar?

Ja

Nej

5. Marker den eller de matricer, som B er similær med:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ingen af matricerne

6. C er diagonaliserbar?

Ja

Nej

7. D er diagonaliserbar?

Ja

Nej

8. Marker den eller de diagonalmatricer, som D er similær med:

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

ingen af matricerne

Opgave 12 (12 point, med modregning)

Marker de af matricerne nedenfor, som har tallene 2, 3 og 7 som egenverdier:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 10 \\ 0 & -5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & -5 & 0 \\ 0 & 100 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$