Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

14. januar 2020 kl. 9:00-13:00

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 13 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt. Eksamen afholdes som digital stedprøve.

Tilladte hjælpemidler: Bøger, noter, fotokopier og print.

Ikke tilladt: Elektroniske hjælpemidler såsom lommeregner eller matematikprogrammer på computeren. Elektroniske dokumenter.

Der gives fuld point, hvis alle korrekte og ingen forkerte svar er afkrydset. Et forkert svar i et spørgsmål annulerer et korrekt svar i samme spørgsmål.

Opgave 1 (10 point)

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ved matrixmultiplikation fås matricen $C = AB$.

(a) (5 point). Hvad er størrelsen af matrix C?

☐ 2×3	☐ 3×3	☐ 2×4
☐ 3×2	☐ 4×3	☐ 4×2

(b) (5 point). Hvad er indgangen c_{13}?

☐ -3	☐ 0	☐ 4
☐ -1	☐ 1	☐ 3

Opgave 2 (10 point)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Markér de to rigtige udsagn herunder:

☐ Ligningssystemet har ingen løsninger

☐ $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ er en løsning til ligningssystemet

☐ $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ og $x_3 = 0$ er en løsning til ligningssystemet

☐ Ligningssystemet har netop to løsninger

☐ Ligningssystemet har uendeligt mange løsninger

☐ $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ og $x_3 = 0$ er den eneste løsning til ligningssystemet

Opgave 3 (10 point)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) (5 point). Hvad er $A\mathbf{v}$?

☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ☐ Ingen af de nævnte

(b) (5 point). Hvad er den inverse til A?

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ Ingen af de nævnte

Opgave 4 (10 point)

Det karakteristiske polynomium for matricen

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 8 \\ -4 & -3 & 8 \\ -4 & -6 & 11 \end{bmatrix}$$

er $-(t-3)(t-1)(t+2)$.

(a) (2 point). Hvilke tre af følgende tal er egenværdi for A?

☐ -3 ☐ -2 ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

(b) (2 point). Hvilken af følgende er egenvektor for A?

☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) (2 point). Er A invertibel?

☐ Ja ☐ Nej

(d) (2 point). Er A diagonaliserbar?

☐ Ja ☐ Nej

(e) (2 point). Hvis $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, så er EA:

☐ $\begin{bmatrix} -6 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \\ -4 & -6 & 11 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -6 & -1 & 8 \\ -4 & -3 & 8 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 8 \\ -4 & -6 & 11 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -6 & -1 & 8 \\ -4 & -3 & -8 \\ -4 & -6 & 11 \end{bmatrix}$

Opgave 5 (12 point)

Lad $T\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ være en lineær transformation med standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Hvad er n?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

(b) (2 point). Hvad er m?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

(c) (2 point). Hvad er rangen $\text{Rank}(A)$?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

(d) (2 point). Hvad er nulliteten $\text{Nullity}(A)$?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

(e) (2 point). Ligger $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ i:

☐ Søjlerummet $\text{Col}(A)$ ☐ Nulrummet $\text{Null}(A)$ ☐ Ingen af de foregående

(f) (2 point). Ligger $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i:

☐ Søjlerummet $\text{Col}(A)$ ☐ Nulrummet $\text{Null}(A)$ ☐ Ingen af de foregående

Opgave 6 (2 point)

A er en $n \times 3$-matrix, B er en $m \times 5$-matrix og $C = AB$ er en $p \times p$-matrix. Hvilke værdier har m, n og p?

- ☐ $m = n = p = 3$
- ☐ $m = 3, n = 5, p = 4$
- ☐ $m = n = 5, p = 3$
- ☐ Ingen af de foregående

Opgave 7 (6 point)

Lad $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ og $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) (3 point). Er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ortogonale?

☐ Ja ☐ Nej ☐ Hverken ja eller nej

(b) (3 point). Hvad er ortogonalprojektionen af $\mathbf{u}$ på W?

☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

Opgave 8 (8 point)

Den lineære transformation $T\colon \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ opfylder, at for $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er $T(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$ og $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

(a) (2 point). Er $T(\mathbf{u})$ og $T(\mathbf{v})$ ortogonale?

☐ Ja ☐ Nej

(b) (2 point). Hvilke af vektorerne $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er egenvektorer?

☐ Kun $\mathbf{u}$ ☐ Kun $\mathbf{v}$ ☐ Både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ☐ Ingen af dem

(c) (2 point). Gælder det, at $T(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^2$?

☐ Ja ☐ Nej

(d) (2 point). T er en

☐ Spejling ☐ Rotation ☐ Ingen af delene

Opgave 9 (2 point)

Lad $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Hvis man anvender en Gram-Schmidt-process på $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, så man får de ortogonale vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, så er $\mathbf{v}_3$:

☐ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Opgave 10 (10 point)

Lad A og B være 4×4-matricer med determinanter $\det(A) = -4$ og $\det(B) = 2$, hhv.

(a) (2 point). Hvad er $\det(A^T)$?

☐ 2 ☐ -2 ☐ -4 ☐ 4 ☐ -8 ☐ Ikke defineret

(b) (2 point). Hvad er $\det(-A)$?

☐ 2 ☐ -2 ☐ -4 ☐ 4 ☐ -8 ☐ Ikke defineret

(c) (2 point). Hvad er $\det(AB^{-1})$?

☐ 2 ☐ -2 ☐ -4 ☐ 4 ☐ -8 ☐ Ikke defineret

(d) (2 point). Hvad er $\det(-B^2)$?

☐ 2 ☐ -2 ☐ -4 ☐ 4 ☐ -8 ☐ Ikke defineret

(e) (2 point). Hvad er $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right)$?

☐ 2 ☐ -2 ☐ -4 ☐ 4 ☐ -8 ☐ Ikke defineret

Opgave 11 (10 point)

Matricen A er rækkereduceret til matricen R, hvor

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_5\ \mathbf{a}_6]$ hvor $\mathbf{a}_i$ er i'te søjle i A.

(a) (2 point). Hvad er nulliteten Nullity(A)?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger.

(b) (2 point). Hvad er rangen Rank(A)?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger.

(c) (2 point). Hvilke søjler i A er pivotsøjler?

- ☐ $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$
- ☐ $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ og $\mathbf{a}_6$
- ☐ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ og $\mathbf{a}_5$
- ☐ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$
- ☐ Alle
- ☐ Ingen

(d) (2 point). Hvillket at følgende udsagn er korrekt?

- ☐ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ er lineært uafhængig.
- ☐ $\mathbf{a}_4 = 3\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_3$
- ☐ $\mathbf{a}_4 = -3\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_3$
- ☐ $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$
- ☐ $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$
- ☐ $\mathbf{a}_5$ er en linearkombination af $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$

(e) (2 point). Hvis $A = [B\ \mathbf{b}]$ er totalmatricen/den udvidede koefficientmatrix for et system af lineære ligninger i $x_1, x_2, \ldots, x_5$, har ligningssystemet så en løsning, hvor $x_2 = x_4$?

- ☐ Ja
- ☐ Nej
- ☐ Det kan man ikke afgøre med de givne oplysninger.

Opgave 12 (8 point)

A og B er to kvadratiske matricer, $\mathbf{v}$ er egenvektor for A med egenværdi 4, $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ er egenvektor for B med egenværdi -8.

(a) (2 point). Er $\mathbf{v}$ en egenvektor for BA?

- ☐ Ja, med egenværdi -2
- ☐ Ja, med egenværdi 4
- ☐ Ja, med egenværdi -8
- ☐ Ja, med egenværdi 64
- ☐ Ja, med egenværdi -32
- ☐ Nej

(b) (2 point). Er $\mathbf{v}$ en egenvektor for AB?

- ☐ Ja, med egenværdi -2
- ☐ Ja, med egenværdi 4
- ☐ Ja, med egenværdi -8
- ☐ Ja, med egenværdi 64
- ☐ Ja, med egenværdi -32
- ☐ Nej

(c) (2 point). Er $\mathbf{v}$ en egenvektor for B?

- ☐ Ja, med egenværdi -2
- ☐ Ja, med egenværdi 4
- ☐ Ja, med egenværdi -8
- ☐ Ja, med egenværdi 64
- ☐ Ja, med egenværdi -32
- ☐ Nej

(d) (2 point). Er $\mathbf{v}$ en egenvektor for B^2?

- ☐ Ja, med egenværdi -2
- ☐ Ja, med egenværdi 4
- ☐ Ja, med egenværdi -8
- ☐ Ja, med egenværdi 64
- ☐ Ja, med egenværdi -32
- ☐ Nej

Opgave 13 (2 point)

I MATLABs Command Window indtastes følgende:

```
>> u = [1; 1; 1; 1];
>> v = [1; 2; 3; 4];
>> w = [1; 3; 6; 10];
>> z = [1; 4; 10; 19];
>> A = [u v w z];
>> rref(A)
 ans =
         1    0    0    1
         0    1    0   -3
         0    0    1    3
         0    0    0    0
```

Hvis A bruges som koefficientmatrix i et lineært ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvilket af følgende udsagn er så korrekt?

☐ Ligningssystemet har en entydig løsning: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ og $x_3 = 3$.

☐ Ligningssystemet har uendeligt mange løsninger; x_4 er en fri variabel.

☐ Enten har ligningssystemet ikke nogen løsninger, eller også har det uendeligt mange; det kommer an på hvad $\mathbf{b}$ er.