To find the English version of the exam, please read from the other end!

Se venligst bort fra den engelske tekst på bagsiden, hvis du følger den danske version af prøven.

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

15. juni 2018, 9:00 – 13:00

Eksamenssættet består af 9 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver.
For hvert spørgsmål er der angivet et antal point.
Hele opgavesættet svarer til 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv.
Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i dette opgavesæt.
Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.

I opgaverne 1, 2 og 3 evalueres der efter følgende princip:
Hver forkert afkrydsning ophæver (modregnes i) én rigtig afkrydsning.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

NAVN:______________________________________

STUDIENUMMMER:______________________________________

Opgave 1 (6 point, med modregning)

Hvilke udsagn om ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

er sande?

☐ $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -2$ løser systemet.
☐ $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 1$ løser systemet.
☐ Systemet har uendeligt mange løsninger.

Opgave 2 (8 point, med modregning)

I opgaven undersøges matricen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hvilke af de følgende påstande er korrekte?

☐ $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A.

☐ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A.

☐ $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A.

☐ $\mathbf{u}$ og $\mathbf{w}$ har samme tilhørende egenværdi.

☐ $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært afhængige.

☐ A er diagonaliserbar.

☐ A er similær med diagonalmatricen $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

☐ A er invertibel (regulær).

Opgave 3 (8 point, med modregning)

A er en $m \times 2$-matrix og B er en $n \times 4$ matrix, sådan at $C = AB$ er en 4×4 matrix. A er standardmatricen for en lineær transformation $S : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^m$, B er standardmatricen for en lineær transformation $T : \mathcal{R}^4 \to \mathcal{R}^n$, og C er standardmatricen for en lineær transformation $U : \mathcal{R}^4 \to \mathcal{R}^4$.

1. Hvilke værdier antager m og n?

   ☐ $m = n = 2$ ☐ $m = 2, n = 4$ ☐ $m = n = 4$ ☐ $m = 4, n = 2$

   Hvilke af følgende udsagn kan *umuligt* være sande?

2. ☐ S er på (surjektiv)
   ☐ S er en-til-en (injektiv)

3. ☐ T er på (surjektiv)
   ☐ T er en-til-en (injektiv)

4. ☐ U er på (surjektiv)
   ☐ U er en-til-en (injektiv)

Opgave 4 (8 point)

Her ses på matricen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. Er $\mathbf{d}$ indeholdt i søjlerummet Col A?

   ☐ Ja ☐ Nej

2. Er $\mathbf{b}$ indeholdt i søjlerummet Col A?

   ☐ Ja ☐ Nej

3. Er $\mathbf{c}$ indeholdt i nulrummet Null A?

   ☐ Ja ☐ Nej

4. Er $\mathbf{d}$ indeholdt i nulrummet Null A?

   ☐ Ja ☐ Nej

Opgave 5 (4 point)

Hvilken af de følgende vektorer stemmer overens med produktet $A\mathbf{b}$ af matricen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ og vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$?

☐ $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -9 \end{bmatrix}$ ☐ ingen af dem

Opgave 6 (6 point)

Opgaven tager udgangspunkt i ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \end{array}.$$

1. Angiv hvilken af matricerne nedenfor, der svarer til ligningssystemets udvidede koefficientmatrix/totalmatrix $[A \ \mathbf{b}]$?

   ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 11 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 3 & 11 & 7 \end{bmatrix}$

   ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 11 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

2. Hvilken af de følgende matricer er den reducerede echelonmatrix/trappematrix som er rækkeækvivalent med $[A \ \mathbf{b}]$?

   ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

3. Hvilken af de følgende påstande er sand?

   ☐ Systemet er inkonsistent.

   ☐ $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 1$ er en blandt flere af systemets løsninger.

   ☐ $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 1$ er systemets eneste løsning.

   ☐ $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 3$ er en blandt flere af systemets løsninger.

   ☐ $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 3$ er systemets eneste løsning.

Opgave 7 (10 point)

Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ betragtes for $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Det oplyses at totalmatricen $[A \;\; \mathbf{b}]$ er rækkeækvivalent med den reducerede echelonmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilke søjler i matricen A er pivotsøjler?

   ☐ alle fire søjler ☐ søjlerne 1 og 4
   ☐ søjlerne 2 og 4 ☐ søjlerne 1 og 3

2. Hvad er rangen af matricen A?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

3. Hvad er nulliteten af matricen A?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

4. Har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en løsning $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ hvori $x_2 = -3$?

   ☐ Ja ☐ Nej

5. Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har som partikulærløsning

   ☐ $\mathbf{x} = (-2, 1, 1, 1)$ ☐ $\mathbf{x} = (-2, 1, -1, -1)$ ☐ $\mathbf{x} = (-2, 0, 1, 0)$

Opgave 8 (6 point)

I opgaven undersøges tre vektorer $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ t \end{bmatrix}$ i $\mathcal{R}^3$.

Bemærk at den sidste koordinat t i vektoren $\mathbf{c}$ er et variabelt reelt tal.
Hvilke af de følgende påstande er korrekte?

1. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er lineært afhængige vektorer for

   ☐ $t = 2$ ☐ $t = -6$ ☐ $t \neq -6$ ☐ alle reelle tal t

2. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ udspænder $\mathcal{R}^3$ for

   ☐ $t = 2$ ☐ $t = -6$ ☐ $t \neq -6$ ☐ alle reelle tal t

Opgave 9 (6 point)

Her ses på to 5×5 matricer A og B. Desuden er $\mathbf{v}$ en egenvektor for A med tilhørende egenværdi -3, og $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ er en egenvektor for B med egenværdi 5.

1. Er $\mathbf{w}$ altid en egenvektor for $B^2 = BB$?

   ☐ Ja ☐ Nej

   I givet fald, hvad er den tilhørende egenværdi?

   ☐ -50 ☐ -25 ☐ 25 ☐ 50

2. Er $\mathbf{v}$ altid en egenvektor for BA?

   ☐ Ja ☐ Nej

   I givet fald, hvad er den tilhørende egenværdi?

   ☐ -3 ☐ 5 ☐ -15 ☐ 15

3. Er $\mathbf{v}$ altid en egenvektor for AB?

   ☐ Ja ☐ Nej

   I givet fald, hvad er den tilhørende egenværdi?

   ☐ -3 ☐ 5 ☐ -15 ☐ 15

Opgave 10 (6 point)

De tre vektorer $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ udgør en basis $\mathcal{B}$ for $\mathcal{R}^3$. Hvis man anvender Gram-Schmidt processen på $\mathcal{B}$, så fremkommer der en ortogonal basis bestående af vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Der gælder:

1. ☐ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ ☐ $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1$ ☐ ingen af delene
2. ☐ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ ☐ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_1$ ☐ ingen af delene
3. ☐ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3$ ☐ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$
   ☐ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2$ ☐ ingen af delene

Opgave 11 (12 point)

I denne opgave betragtes de følgende 4 matricer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Er det sandt, at

1. A og B er inverse til hinanden?

   ☐ Ja ☐ Nej

2. C og D er inverse til hinanden?

   ☐ Ja ☐ Nej

3. A er diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

4. B er diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

5. C er diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

6. D er diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

Opgave 12 (8 point)

I denne opgave tages udgangspunkt i vektorerne $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\mathcal{R}^2$ og i en lineær transformation $T : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$, som opfylder:

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{ og } T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}.$$

Lad $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]$ være standardmatricen for transformationen T ($\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ er altså søjlevektorerne i A).

1. $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale.

   ☐ Ja ☐ Nej

2. Hvilke af vektorerne $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ er egenvektorer for T ?

   ☐ Kun $\mathbf{u}$ ☐ Kun $\mathbf{v}$ ☐ både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ☐ ingen af dem

3. Vektorerne $\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{u}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{v}$ udgør en ortonomal basis for $\mathcal{R}^2$?

   ☐ Ja ☐ Nej

4. $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -0,8 \\ 0,6 \end{bmatrix}$.

   ☐ Ja ☐ Nej

5. $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{bmatrix}$.

   ☐ Ja ☐ Nej

6. A er en ortogonal matrix.

   ☐ Ja ☐ Nej

7. Er $T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathcal{R}^2$?

   ☐ Ja ☐ Nej

8. Afbildningen T beskriver i planen

   ☐ en spejling ☐ en drejning ☐ ingen af delene

Opgave 13 (8 point)

Her ses på 5×5-matricer A, B som opfylder at $\det A = -3$ og $\det(AB) = 6$.

1. Hvilken værdi har $\det(-A)$?

   ☐ -3 ☐ 3 ☐ 15 ☐ 18

2. Hvilken værdi har $\det(2A)$?

   ☐ 6 ☐ 32 ☐ 96 ☐ -96

3. Hvilken værdi har $\det B$?

   ☐ 8 ☐ -8 ☐ 3 ☐ -2

4. Hvilken værdi har $\det((B^T A)^T)$?

   ☐ -6 ☐ 6 ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ $-\frac{3}{2}$

Opgave 14 (4 point)

Følgende kommandoer indtastes i MATLABs Command Window:

```
>> A = [3 1 1; 1 2 -1; 2 -1 1 ];
>> b = [4; 3; 2];
>> T = [A b];
```

1. Hvad er størrelsen af matricen T?

   ☐ 6×3 ☐ 3×3 ☐ 4×3 ☐ 3×4

2. Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning $\mathbf{x}$. Hvilken af følgende kombinationer af MATLAB kommandoer beregner $\mathbf{x}$?

   ☐ `>> R = rref(T); x=R(4,:)`

   ☐ `>> R = rref(A); x=R(:,4)`

   ☐ `>> R = rref(T); x=R(:,4)`

   ☐ `>> R = rref(T); x=R(:,5)`

   ☐ `>> R = rref(A); x=R(4,:)`