Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

14. januar 2019 kl. 9:00-13:00

Dette eksamenssæt består af 8 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt. Eksamen afholdes som digital stedprøve.

Tilladte hjælpemidler: Bøger, noter, fotokopier og print.

Ikke tilladt: Elektroniske hjælpemidler såsom lommeregner eller matematik programmer på computeren. Elektroniske dokumenter.

Der henvises i øvrigt til de generelle retningslinjer for afholdelse af eksamen.

Held og lykke!

Opgave 1 (5 point)

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ved matrixmultiplikation fås matricen $C = AB$.

(a) (2 point). Hvad er størrelsen af matrix C?

☐ 2×3	☐ 3×4	☐ 2×4
☐ 3×2	☐ 4×3	☐ 4×2

(b) (3 point). Hvad er indgangen c_{12}?

☐ -3	☐ 0	☐ 3
☐ -1	☐ 1	☐ 5

Opgave 2 (6 point)

En matrix er defineret som

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 3 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

hvor c er en reel konstant.

(a) (3 point). Hvad er matricens determinant, når $c = 1$?

☐ -15	☐ -10	☐ 3	☐ 12
☐ -12	☐ -8	☐ 5	☐ 14

(b) (3 point). For hvilken værdi af c er matricen ikke inverterbar?

☐ -8	☐ -3	☐ 0	☐ 3
☐ -7	☐ -11	☐ 2	☐ 5

Opgave 3 (6 point)

Lad A og B være to 3×3-matricer med determinanter

$$\det(A) = 2, \quad \det(B) = -3.$$

Lad endvidere C være matricen, som fremkommer fra A, ved først at udføre den elementære rækkeoperation $5r_1 + r_2 \to r_2$ og dernæst operationen $3r_2 \to r_2$.

(a) (2 point). Hvad er $\det(C)$?

☐ -18	☐ -6	☐ 3	☐ 10
☐ -12	☐ 2	☐ 6	☐ 12

(b) (2 point). Hvad er $\det(B^4)$?

☐ -64	☐ -12	☐ 10	☐ 81
☐ -40	☐ -8	☐ 50	☐ 142

(c) (2 point). Hvad er $\det(AB^{-1}A^{-1})$?

☐ -12	☐ -3	☐ $\frac{1}{2}$	☐ $\frac{10}{3}$
☐ -6	☐ $-\frac{1}{3}$	☐ 5	☐ 12

Opgave 4 (6 point)

Et ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -13. \end{aligned}$$

Markér det rigtige udsagn herunder.

☐ Den eneste løsning til systemet er $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$.

☐ Der er uendelig mange løsninger. En af disse er $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$.

☐ Den eneste løsning til systemet er $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$.

☐ Der er uendelig mange løsninger. En af disse er $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$.

☐ Ligningssystmet er inkonsistent.

☐ Ligningssystemet er konsistent og har to frie variable.

Opgave 5 (8 point)

Et ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + rx_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8, \end{aligned}$$

hvor r er en reel konstant. For hvilken værdi af r er systemet inkonsistent?

☐ -7	☐ -2	☐ 0	☐ 5
☐ -5	☐ $-\frac{1}{3}$	☐ 3	☐ 12

Opgave 6 (9 point)

Lad $S : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ og $T : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ være de lineære afbildninger med forskrifterne

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 point). Hvad er standardmatricen for S?

☐ $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
☐ $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) (3 point). Hvad er standardmatricen for den sammensatte afbildning $ST : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$?

☐ $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 17 & 14 \end{bmatrix}$
☐ $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -12 & 2 \end{bmatrix}$

(c) (3 point). Hvad er standardmatricen for den inverse afbildning $T^{-1} : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$?

☐ $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$
☐ $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$	☐ $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -21 & 2 \end{bmatrix}$

Opgave 7 (6 point)

Betragt matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Hvad er dens egenværdier?

- ☐ 2 og 4
- ☐ -1 og 1
- ☐ 3 og -5
- ☐ $\frac{1}{2}$ og 5
- ☐ 3 med multipliciteten 2
- ☐ der er ingen

Bemærk: I opgaven herunder har spørgsmål (a) og (b) en eller flere rigtige svarmuligheder. Her vil hver forkert afkrydsning ophæve en rigtig afkrydsning.

Opgave 8 (9 point)

Opgaven drejer sig om matricer, hvis indgange er reelle tal. En sådan matrix er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Det oplyses, at det karakteristiske polynomium for A er

$$-(t-3)(t^2+1).$$

Desuden defineres følgende vektorer:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 point med modregning). Markér de af vektorerne, som er egenvektorer for A.

☐ $\mathbf{v}_1$ ☐ $\mathbf{v}_2$ ☐ $\mathbf{v}_3$ ☐ $\mathbf{v}_4$ ☐ $\mathbf{v}_5$

(b) (3 point med modregning). Marker egenværdierne for A.

☐ 0 ☐ 1 ☐ -3 ☐ 2 ☐ 3

(c) (3 point). Er A diagonaliserbar?

☐ Ja ☐ Nej

Opgave 9 (9 point)

Det oplyses, at $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ er en basis for $\mathcal{R}^3$, hvor

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

En lineær operator T på $\mathcal{R}^3$ er defieret ved forskriften

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix}.$$

Hvad er matrixrepræsentationen $[T]_{\mathcal{B}}$ af operatoren T relativt til basen $\mathcal{B}$?

☐ $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 14 & -7 \\ 9 & 12 & -3 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} -7 & -11 & -13 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 17 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -11 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} -11 & -8 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 9 & 12 & -3 \end{bmatrix}$

Opgave 10 (8 point)

Underrummet W af $\mathcal{R}^4$ har basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, hvor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ved at anvende Gram-Schmidt processen på $\mathcal{B}$ fås en ortogonal basis for W. Markér denne basis herunder.

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Opgave 11 (11 point)

Tre vektorer er givet som

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Underrummet W af $\mathcal{R}^4$ defineres som $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(a) (4 point). Hvad er den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W?

☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) (4 point). Hvad er afstanden fra $\mathbf{u}$ til W?

☐ 1 ☐ $3\sqrt{2}$ ☐ 5 ☐ $\sqrt{3}$

☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{5}$ ☐ 3 ☐ $\sqrt{11}$

(c) (3 point). Hvad er dimensionen af $W^{\perp}$?

☐ 0 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 10

☐ 1 ☐ 3 ☐ 8 ☐ 12

Opgave 12 (5 point)

Lad $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ være vektorer i $\mathcal{R}^3$ således, at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er lineært uafhængig, men $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært afhængig. Definer et underrum og en matrix som

$$W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}, \quad A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3].$$

Markér det rigtige udsagn herunder.

☐ Underrummet W kan beskrives som en linje gennem origo i $\mathcal{R}^3$.

☐ Dimensionen af underrummet W er 3.

☐ Linearkombinationen $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3$ ligger ikke i W.

☐ A er en inverterbar matrix.

☐ $\det(A) = 0$.

Bemærk: I opgaven herunder har spørgsmål (a) og (b) en eller flere rigtige svarmuligheder. Her vil hver forkert afkrydsning ophæve en rigtig afkrydsning.

Opgave 13 (6 point)

En liste af vektorer er givet ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 point med modregning). Hvilke af følgende mængder er lineært uafhængige?

- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$
- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$
- ☐ $\{\mathbf{v}_1\}$
- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$
- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$

(b) (3 point med modregning). Hvilke af følgende mængder udspænder $\mathcal{R}^3$?

- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$
- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$
- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$
- ☐ $\{\mathbf{v}_2\}$

Opgave 14 (6 point)

I MATLABs Command Window indtastes følgende:

```
>> t = pi/4;
>> A = [ cos(t) -sin(t) ; sin(t) cos(t) ];
>> v = [1; 1];
>> A*A*v
```

Hvad er MATLABs svar på dette?

☐
```
ans =
          1.0000
          2.0000
```

☐
```
ans =
         -1.0000
          1.0000
```

☐
```
ans =
          1.0000
          1.0000
```

☐
```
ans =
          1.5000
         -1.5000
```

☐
```
ans =
          0.0000
          0.0000
```

☐
```
ans =
          2.0000
         -2.5000
```