To find the English version of the exam, please read from the other end!

Se venligst bort fra den engelske version på modsatte side hvis du følger denne danske version af prøven.

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

12. juni 2017

Dette eksamenssæt består af 10 nummererede sider med 14 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point.
Hele opgavesættet svarer til 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv.
Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i dette opgavesæt.
Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger.
I opgaverne 1, 2 og 3 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.
Sæt kryds ved det hold du deltager i.

Held og lykke!

NAVN:______________________________

STUDIENUMMMER:______________________________

☐ Hold 1: BIO – KEMI – KEMT – MILT – BIOT Nikolaj Hess-Nielsen

☐ Hold 2: BA – EGI – FYS – NANO Jacob Broe

☐ Hold BA – MK – EN – KBT (Esbjerg) Ulla Tradsborg

☐ Hold ED – CBT (Esbjerg) Ulla Tradsborg

Opgave 1 (6 point)

Hvilke udsagn om ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 15 \end{aligned}$$

er sande?

☐ $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -5$ løser systemet.
☐ $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 1$ løser systemet.
☐ Systemet har $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -5$ som den eneste løsning.

Opgave 2 (8 point)

I opgaven undersøges matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hvilke af de følgende påstande er korrekte?

☐ $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Null}(A)$.

☐ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A.

☐ $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A.

☐ $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ har samme tilhørende egenværdi.

☐ $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært afhængige.

☐ A er invertibel (regulær).

☐ A er diagonaliserbar.

☐ Der findes netop én diagonalmatrix D som er similær med A.

Opgave 3 (8 point)

A er en $m \times n$-matrix, B er en 2×3 matrix, $C = AB$ er en 3×3 matrix.

1. Hvilke værdier antager m og n?

   ☐ $m = n = 2$ ☐ $m = 2, n = 3$ ☐ $m = 3, n = 2$ ☐ $m = n = 3$

2. A er standardmatricen for en lineær transformation $S : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$, B er standardmatricen for en lineær transformation $T : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$, og C er standardmatricen for en lineær transformation $U : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$.
   Hvilke af følgende udsagn kan *umuligt* være sande?

   (a) ☐ S er på (surjektiv)
   ☐ S er en-til-en (injektiv)

   (b) ☐ T er på (surjektiv)
   ☐ T er en-til-en (injektiv)

   (c) ☐ U er på (surjektiv)
   ☐ U er en-til-en (injektiv)

Opgave 4 (8 point)

Opgaven tager udgangspunkt i matricen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

samt vektorerne $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. Er $\mathbf{d}$ indeholdt i søjlerummet Col A?

   ☐ Ja ☐ Nej

2. Er $\mathbf{b}$ indeholdt i søjlerummet Col A?

   ☐ Ja ☐ Nej

3. Er $\mathbf{d}$ indeholdt i nulrummet Null A?

   ☐ Ja ☐ Nej

4. Er $\mathbf{c}$ indeholdt i nulrummet Null A?

   ☐ Ja ☐ Nej

Opgave 5 (6 point)

En lineær transformation $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ har standard matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilken værdi har tallet n?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

2. Hvilken værdi har tallet m?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

3. Hvad er rangen af A?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af A?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

5. Er T på (surjektiv)?

   ☐ Ja ☐ Nej

6. Er T en-til-en (injektiv)?

   ☐ Ja ☐ Nej

Opgave 6 (4 point)

Hvilken af de følgende vektorer stemmer overens med produktet $A\mathbf{b}$ af matricen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ og vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

☐ $\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ ingen af dem

Opgave 7 (6 point)

Opgaven tager udgangspunkt i $m \times m$ matricer A og B. Sæt $C = BA$ og $D = AB$. Desuden er $\mathbf{v}$ en egenvektor for A med tilhørende egenværdi 2 og $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ er en egenvektor for B med tilhørende egenværdi -4.
Er det *altid sandt* at

1. $\mathbf{v}$ er en egenvektor for C?

   ☐ Ja ☐ Nej

   I givet fald, hvad er den tilhørende egenværdi?

   ☐ -2 ☐ 2 ☐ 8 ☐ -8

2. $\mathbf{v}$ er en egenvektor for D?

   ☐ Ja ☐ Nej

   I givet fald, hvad er den tilhørende egenværdi?

   ☐ -2 ☐ 2 ☐ 8 ☐ -8

3. $\mathbf{w}$ er en egenvektor for $B^2 = BB$?

   ☐ Ja ☐ Nej

   I givet fald, hvad er den tilhørende egenværdi?

   ☐ -4 ☐ 4 ☐ 2 ☐ 16

Opgave 8 (6 point)

De tre vektorer $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ udgør tilsammen en basis $\mathcal{B}$ for $\mathcal{R}^3$. Hvis man anvender Gram-Schmidt processen på $\mathcal{B}$, så fremkommer der en ortogonal basis bestående af vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Der gælder:

1. ☐ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ ☐ $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1$ ☐ ingen af delene
2. ☐ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2$ ☐ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ ☐ ingen af delene
3. ☐ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3$ ☐ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$
   ☐ $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2$ ☐ ingen af delene

Opgave 9 (12 point)

I denne opgave betragtes de følgende 4 matricer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Er det sandt, at

1. A og B er inverse til hinanden?

   ☐ Ja ☐ Nej

2. C og D er inverse til hinanden?

   ☐ Ja ☐ Nej

3. A er diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

4. B er diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

5. C er diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

6. D er diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

Opgave 10 (8 point)

I denne opgave tages udgangspunkt i vektorerne $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\mathcal{R}^2$ samt i en lineær transformation $T : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ som opfylder:

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{ og } T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}.$$

Lad $A = [\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2]$ være standard matricen for transformationen T; $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ er altså søjlevektorerne i A.

Hvilke af de følgende udsagn er sande?

1. $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale.

   ☐ Ja ☐ Nej

2. $\mathbf{u}$ er en egenvektor for T.

   ☐ Ja ☐ Nej

3. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ er en egenvektor for T.

   ☐ Ja ☐ Nej

4. $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0.96 \\ 0.28 \end{bmatrix}$.

   ☐ Ja ☐ Nej

5. $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0.96 \\ 0.28 \end{bmatrix}$.

   ☐ Ja ☐ Nej

6. A er en ortogonal matrix.

   ☐ Ja ☐ Nej

7. T beskriver en drejning (rotation) i planen.

   ☐ Ja ☐ Nej

8. T beskriver en spejling (refleksion) i planen.

   ☐ Ja ☐ Nej

Opgave 11 (10 point)

Opgaven tager udgangspunkt i matricen $A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

samt vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Det oplyses at totalmatricen

$$[A\ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

har reduceret række echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Hvilke søjler i matricen A er pivotsøjler?

   ☐ alle fire søjler
   ☐ kun søjle 2
   ☐ netop søjlerne 1, 3 og 4
   ☐ netop søjlerne 1, 2 og 3

2. Hvad er rangen af matricen A?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

3. Hvad er nulliteten af matricen A?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

4. Findes der en løsning $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $x_2 = 2$?

   ☐ Ja ☐ Nej

   I givet fald, hvad gælder der om de resterende koordinater (ubekendte)?

   ☐ $x_1 = 1, x_3 = 3, x_4 = 4$
   ☐ $x_1 = -1, x_3 = 3, x_4 = 4$
   ☐ $x_1 = 1, x_3 = x_4 = 0$

Opgave 12 (6 point)

I opgaven undersøges tre vektorer $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ c \end{bmatrix}$ i $\mathcal{R}^3$.

Bemærk at den sidste koordinat c i vektoren $\mathbf{c}$ er et variabelt reelt tal.
Hvilke af de følgende påstande er korrekte?

1. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er lineært afhængige vektorer for

   ☐ $c = 0$ ☐ $c \neq 4$ ☐ intet reelt tal c
   ☐ $c = 4$ ☐ alle reelle tal c

2. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ udspænder $\mathcal{R}^3$ for

   ☐ $c = 0$ ☐ $c \neq 4$ ☐ intet reelt tal c
   ☐ $c = 4$ ☐ alle reelle tal c

Opgave 13 (8 point)

Opgaven handler om tre (6×6)-matricer A, B og $C = AB$.
Om disse vides, at $\det A = -2$ og $\det C = -6$.

1. Hvilken værdi har $\det(-A)$?

   ☐ -2 ☐ 2 ☐ -4 ☐ 4

2. Hvilken værdi har $\det(2A)$?

   ☐ -4 ☐ 64 ☐ -128 ☐ 128

3. Hvilken værdi har $\det B$?

   ☐ 12 ☐ -12 ☐ 3 ☐ -3

4. Hvilken værdi har $\det(B^T A)$?

   ☐ -6 ☐ 6 ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ $-\frac{3}{2}$

Opgave 14 (4 point)

Følgende kommandoer indtastes i MATLABs Command Window:

```
>> A = [1 2 -1; 3 1 1; 2 -1 1 ];
>> b = [3; 4; 2];
>> T = [A b];
```

1. Hvad er størrelsen af matricen T?

   ☐ 4×3 ☐ 4×4 ☐ 4×5 ☐ 3×4 ☐ 12×1

2. Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning $\mathbf{x}$. Hvilken af følgende kombinationer af MATLAB kommandoer beregner $\mathbf{x}$?

   ☐ `>> R = rref(T); x=R(:,4)`

   ☐ `>> R = rref(A); x=R(:,4)`

   ☐ `>> R = rref(T); x=R(:,5)`

   ☐ `>> R = rref(A); x=R(4,:)`

   ☐ `>> R = rref(T); x=R(4,:)`