Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

5. januar 2018

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 15 afkrydsningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN: ____________________________________

STUDIENUMMMER: ____________________________________

Opgave 1 (6 point)

Et ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Markér det rigtige udsagn heunder.

☐ Ligningssystmet har ingen løsninger.

☐ Den eneste løsning til systemet er $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

☐ Der er uendelig mange løsninger. En af disse er $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.

☐ Ligningssystemet har netop to løsninger.

Opgave 2 (7 point)

Lad $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, hvor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(a) (4 point). Hvilken af følgende vektorer ligger *ikke* i W?

☐ $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) (3 point). Hvad er dimensionen af W?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 6 ☐ 9

Opgave 3 (5 point)

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ved matrixmultiplikation fås matricen $C = AB$.

(a) (2 point). Hvad er størrelsen af matrix C?

☐ 3×2 ☐ 2×3 ☐ 3×3 ☐ 3×5 ☐ 5×3

(b) (3 point). Hvad er indgangen c_{21}?

☐ -1 ☐ 0 ☐ 3 ☐ 6 ☐ 5

Opgave 4 (5 point)

Betragt følgende seks matricer:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). For hvilket i er A_i *ikke* en elementær matrix?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(b) (3 point). For hvilket i er $A_i B = C$?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Opgave 5 (4 point)

En matrix er givet som

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hvad er matricens determinant?

☐ -4 ☐ 3 ☐ -2 ☐ 0 ☐ 8 ☐ -6

Opgave 6 (10 point)

Lad $T : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ være en lineær transformation med standard matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Hvad er værdien af n?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

(b) (2 point). Hvad er værdien af m?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

(c) (2 point). Er T injektiv (en-til-en)?

☐ Ja ☐ Nej

(d) (2 point). Er T surjektiv (på)?

☐ Ja ☐ Nej

(e) (2 point). Findes der to forskellige vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ således at $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$?

☐ Ja ☐ Nej

Opgave 7 (5 point)

Betragt matricen

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Hvad er dens egenværdier?

☐ -2 og 5
☐ 2 og -5
☐ -1 og 3
☐ 1 og -3
☐ -2 med multipliciteten 2
☐ der er ingen

Opgave 8 (10 point)

En matrix og en vektor er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 8 \\ -4 & -3 & 8 \\ -4 & -6 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Vektoren $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A. Hvad er den tilhørende egenværdi?

☐ -2 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 4

(b) (3 point). Det oplyses, at $\lambda = 3$ er en egenværdi for A. Hvad er dimensionen af det tilhørende egenrum?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

(c) (3 point). Er A diagonaliserbar?

☐ Ja ☐ Nej

(d) (2 point). Hvad er determinanten af A?

☐ -3 ☐ 10 ☐ 9 ☐ -33

Opgave 9 (10 point)

Tre vektorer er er givet ved

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

og et underrum er defineret som $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(a) (2 point). Er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en ortonormal mængde?

☐ Ja ☐ Nej

(b) (2 point). Hvad er dimensionen af W?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(c) (2 point). Hvad er dimensionen af $W^\perp$?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(d) (2 point). Hvad er den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W?

☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) (2 point). Hvad er afstanden fra $\mathbf{u}$ til W?

☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ $2\sqrt{3}$ ☐ 4

Opgave 10 (4 point)

Lad

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Markér den kombination, som gør Q til en ortogonal matrix.

☐ $a = 1, b = -1, c = 1$ ☐ $a = -1, b = 1, c = \sqrt{2}$

☐ $a = -1, b = 1, c = 2$ ☐ $a = 2, b = -1, c = 1$

☐ $a = 1, b = 2, c = \sqrt{2}$ ☐ $a = 1, b = -1, c = 0$

Opgave 11 (7 point)

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ være basen for $\mathcal{R}^2$ med $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Lad desuden $T : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ være en lineær transformation. Matrix repræsentationen af T relativt til basen $\mathcal{B}$ er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hvad er standard matricen for T?

☐ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Bemærkning. I opgave 12 evalueres delspørgsmålene efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 12 (8 point)

En liste af vektorer er givet ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) (4 point). Hvilke af følgende mængder er lineært uafhængige?

☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
☐ $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
☐ $\{\mathbf{v}_5\}$
☐ $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$
☐ $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$
☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$

(b) (4 point). Hvilke af følgende mængder udspænder $\mathcal{R}^4$?

☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$
☐ $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$
☐ $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$
☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$
☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$

Opgave 13 (6 point)

Lad A og B være 4×4-matricer med $\det(A) = -2$ og $\det(B) = 5$.

(a) (2 point). Hvad er $\det(A^3)$?

☐ -6 ☐ 6 ☐ -8 ☐ 8 ☐ -16 ☐ 16

(b) (2 point). Hvad er $\det(A^T B^{-1})$?

☐ $-\frac{5}{2}$ ☐ -10 ☐ 10 ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ $-\frac{2}{5}$ ☐ -50

(c) (2 point). Hvad er $\det(2B)$?

☐ 10 ☐ 20 ☐ 80 ☐ $\frac{5}{2}$ ☐ -10 ☐ 50

Opgave 14 (7 point)

Et underrum af $\mathcal{R}^4$ er givet som $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$, hvor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 2 \\ 26 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Man vil gerne finde en basis for W og bruger MATLABs Command Window som følger:

```
>> A = [ 2 4 1 1 19 2; -1 -2 1 4 -2 3; 1 2 -1 -4 2 1; 3 6 1 0 26 9];
>> rref(A)

ans =

 1   2   0   -1   7   0
 0   0   1    3   5   0
 0   0   0    0   0   1
 0   0   0    0   0   0
```

Hvilken af mængderne herunder udgør en basis for W?

☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ☐ $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$
☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_6\}$ ☐ $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$
☐ $\{\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$ ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$

Opgave 15 (6 point)

Den lineære transformation

$$T : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2; \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

beskriver en spejling i en akse gennem Origo. Hvilken af følgende vektorer ligger på spejlingsaksen?

☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$