

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt
Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

5. januar 2018

Dette eksamenssæt består af 9 nummererede sider med 15 afkrydningsopgaver. For hvert spørgsmål er der angivet et antal point. Hele opgavesættet indeholder 100 point i alt.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

Dine svar skal afkrydses i nærværende opgavesæt. Karaktergivningen baserer sig udelukkende på disse afkrydsninger. Husk at angive dit **fulde navn** og **studienummer** herunder.

Held og lykke!

NAVN:

STUDIENUMMMER:

Facit

Opgave 1 (6 point)

Et ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 7 \\-x_1 + 2x_2 &= 1.\end{aligned}$$

Markér det rigtige udsagn heunder.

- Ligningssystemet har ingen løsninger.
- Den eneste løsning til systemet er $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3$.
- Der er uendelig mange løsninger. En af disse er $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 3$.
- Ligningssystemet har netop to løsninger.

Opgave 2 (7 point)

Lad $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, hvor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(a) (4 point). Hvilken af følgende vektorer ligger *ikke* i W ?

- $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) (3 point). Hvad er dimensionen af W ?

- 1
- 2
- 3
- 6
- 9

Opgave 3 (5 point)

To matricer er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ved matrixmultiplikation fås matricen $C = AB$.

(a) (2 point). Hvad er størrelsen af matrix C ?

- 3×2 2×3 3×3 3×5 5×3

(b) (3 point). Hvad er indgangen c_{21} ?

- -1 0 3 6 5

Opgave 4 (5 point)

Betragt følgende seks matricer:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). For hvilket i er A_i *ikke* en elementær matrix?

- 1 2 3 4

(b) (3 point). For hvilket i er $A_i B = C$?

- 1 2 3 4

Opgave 5 (4 point)

En matrix er givet som

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hvad er matrixens determinant?

- 4 3 -2 0 8 -6

Opgave 6 (10 point)

Lad $T : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$ være en lineær transformation med standard matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Hvad er værdien af n ?

- 1 2 3 4 5

(b) (2 point). Hvad er værdien af m ?

- 1 2 3 4 5

(c) (2 point). Er T injektiv (en-til-en)?

- Ja Nej

(d) (2 point). Er T surjektiv (på)?

- Ja Nej

(e) (2 point). Findes der to forskellige vektorer \mathbf{u} og \mathbf{v} således at $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$?

- Ja Nej

Opgave 7 (5 point)

Betragt matricen

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Hvad er dens egenverdier?

-2 og 5

2 og -5

-1 og 3

1 og -3

-2 med multipliciteten 2

der er ingen

Opgave 8 (10 point)

En matrix og en vektor er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 8 \\ -4 & -3 & 8 \\ -4 & -6 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 point). Vektoren \mathbf{v} er en egenvektor for A . Hvad er den tilhørende egen-
værdi?

-2

0

1

4

(b) (3 point). Det oplyses, at $\lambda = 3$ er en egenværdi for A . Hvad er dimensio-
nen af det tilhørende egenrum?

0

1

2

3

(c) (3 point). Er A diagonaliserbar?

Ja

Nej

(d) (2 point). Hvad er determinanten af A ?

-3

10

9

-33

Opgave 9 (10 point)

Tre vektorer er givet ved

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

og et underrum er defineret som $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(a) (2 point). Er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en ortonormal mængde?

Ja

Nej

(b) (2 point). Hvad er dimensionen af W ?

1

2

3

4

(c) (2 point). Hvad er dimensionen af W^\perp ?

1

2

3

4

(d) (2 point). Hvad er den ortogonale projektion af \mathbf{u} på W ?

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) (2 point). Hvad er afstanden fra \mathbf{u} til W ?

$\sqrt{2}$

2

$2\sqrt{3}$

4

Opgave 10 (4 point)

Lad

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Markér den kombination, som gør Q til en ortogonal matrix.

$a = 1, b = -1, c = 1$

$a = -1, b = 1, c = \sqrt{2}$

$a = -1, b = 1, c = 2$

$a = 2, b = -1, c = 1$

$a = 1, b = 2, c = \sqrt{2}$

$a = 1, b = -1, c = 0$

Opgave 11 (7 point)

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ være basen for \mathcal{R}^2 med $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Lad desuden $T : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ være en lineær transformation. Matrix repræsentationen af T relativt til basen \mathcal{B} er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hvad er standard matricen for T ?

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Bemærkning. I opgave 12 evalueres delspørgsmålene efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 12 (8 point)

En liste af vektorer er givet ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) (4 point). Hvilke af følgende mængder er lineært uafhængige?

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$
 $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$
 $\{\mathbf{v}_5\}$ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$

(b) (4 point). Hvilke af følgende mængder udspænder \mathcal{R}^4 ?

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$
 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$
 $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$

Opgave 13 (6 point)

Lad A og B være 4×4 -matricer med $\det(A) = -2$ og $\det(B) = 5$.

(a) (2 point). Hvad er $\det(A^3)$?

- 6 6 -8 8 -16 16

(b) (2 point). Hvad er $\det(A^T B^{-1})$?

- $-\frac{5}{2}$ -10 10 $\frac{1}{5}$ $-\frac{2}{5}$ -50

(c) (2 point). Hvad er $\det(2B)$?

- 10 20 80 $\frac{5}{2}$ -10 50

Opgave 14 (7 point)

Et underrum af \mathcal{R}^4 er givet som $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$, hvor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 2 \\ 26 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Man vil gerne finde en basis for W og bruger MATLABs Command Window som følger:

```
>> A = [ 2 4 1 1 19 2; -1 -2 1 4 -2 3; 1 2 -1 -4 2 1; 3 6 1 0 26 9];  
>> rref(A)
```

ans =

```
1 2 0 -1 7 0  
0 0 1 3 5 0  
0 0 0 0 0 1  
0 0 0 0 0 0
```

Hvilken af mængderne herunder udgør en basis for W ?

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$
 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_6\}$ $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$
 $\{\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$

Opgave 15 (6 point)

Den lineære transformation

$$T : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2; \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

beskriver en spejling i en akse gennem Origo. Hvilken af følgende vektorer ligger på spejlingsaksen?

$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$