Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

3. januar 2017, kl. 9.00-13.00

Nærværende eksamenssæt består af 10 nummererede sider med ialt 15 opgaver. Alle opgaver er "multiple choice" opgaver. **Besvarelsen skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på besvarelsen.

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLDNUMMER:

☐ Hold 1 (v. Jacob Broe)
☐ Hold 2 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)
☐ Engelsk hold (v. Athanasios Georgiadis)

I alle opgaver gælder at der kun er ét korrekt svar til hvert spørgsmål.

Opgave 1 (5%)

Hvor mange løsninger har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 \quad + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

☐ 0
☐ 1
☐ uendeligt mange.

Opgave 2 (5%)

Lad A være en $4 \times n$ matrix og lad E være elementærmatricen $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Hvordan fremkommer matricen EA fra A?

☐ Ved at addere 3 gange række 1 til række 3.
☐ Ved at addere 3 gange række 3 til række 1.
☐ Ved at addere -3 gange række 3 til række 1.
☐ Ved at addere -3 gange række 1 til række 3.
☐ Ved at addere 3 gange søjle 1 til søjle 3.
☐ Ved at addere -3 gange søjle 3 til søjle 1.

Opgave 3 (10%)

Lad $T : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ være en lineær transformation med standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Hvad er værdien af n ?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

2. Hvad er værdien af m ?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

3. Hvad er rangen af A ?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af T ?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

5. Er T enentydig (en-til-en, injektiv)?

   ☐ Ja ☐ Nej

6. Er T på (surjektiv)?

   ☐ Ja ☐ Nej

Opgave 4 (6%)

Lad $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$. Så er $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en basis for $\mathcal{R}^3$. Lad $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ være den ortogonale basis for $\mathcal{R}^3$ der fremkommer ved at anvende Gram-Schmidt processen på $\mathcal{B}$. Så er $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.
Hvad er $\mathbf{v}_2$?

☐ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

Opgave 5 (6%)

Lad A være en $m \times n$ matrix og lad $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4\ \mathbf{b}_5]$ og C være matricer der opfylder at produkterne AB, BC og CA er definerede.

1. Hvor mange søjler har AB ?

   ☐ 5 ☐ m ☐ n

2. Hvad er størrelsen (formatet, size) af BC ?

   ☐ $m \times n$ ☐ $m \times 5$ ☐ $5 \times n$ ☐ $n \times m$

Opgave 6 (10%)

Det karakteristiske polynomium af

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -6 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

er $(t-1)(t+1)(t-2)^2$.

1. Lad $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. For hvilken værdi af λ er $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$?

   ☐ 1 ☐ -1 ☐ 2 ☐ -2

2. Hvilken af følgende er en egenvektor for A?

   ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Har A en invers matrix?

   ☐ Ja ☐ Nej

4. Er A diagonaliserbar?

   ☐ Ja ☐ Nej

Opgave 7 (6%)

Lad T være den lineære transformation med standardmatrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
$\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$ er en basis for $\mathcal{R}^2$. Hvilken af følgende er matrix repræsentationen af T med hensyn til $\mathcal{B}$, altså $[T]_{\mathcal{B}}$?

☐ $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Opgave 8 (10%)

Lad $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, lad $W = \text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ og lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

1. Er vektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ortogonale?

   ☐ Ja ☐ Nej

2. Hvad er ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på W ?

   ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. Hvad er ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på $W^{\perp}$?

   ☐ $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. Hvad er dimensionen af $W^{\perp}$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Opgave 9 (8%)

Lad $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ og lad $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1. Er $\mathbf{b}$ indeholdt i Col A? ☐ Ja ☐ Nej
2. Er $\mathbf{c}$ indeholdt i Col A? ☐ Ja ☐ Nej
3. Er $\mathbf{b}$ indeholdt i Null A? ☐ Ja ☐ Nej
4. Er $\mathbf{c}$ indeholdt i Null A? ☐ Ja ☐ Nej

Opgave 10 (6%)

Lad A og B være 7×7 matricer med $\det A = 5$ og $\det B = 3$.

1. Hvad er $\det(-A)$?

   ☐ -5 ☐ 5 ☐ 0 ☐ 4

2. Hvad er $\det A^T B$?

   ☐ -15 ☐ -2 ☐ 2 ☐ 15 ☐ $\frac{5}{3}$ ☐ $\frac{3}{5}$ ☐ $-\frac{3}{5}$

3. Hvad er $\det A^{-1} B$?

   ☐ -15 ☐ -2 ☐ 2 ☐ 15 ☐ $\frac{5}{3}$ ☐ $\frac{3}{5}$ ☐ $-\frac{3}{5}$

Opgave 11 (4%)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Lad $C = AB$. Hvad er indgang $(2,1)$ i C, dvs. c_{21} ?

☐ -5 ☐ -4 ☐ -3 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Opgave 12 (4%)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Hvad er determinanten af A?

☐ -10 ☐ -8 ☐ -4 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 10

Opgave 13 (5%)

Lad $Q = c\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$, hvor a og c er konstanter.

For hvilken kombination af a og c er Q en ortogonal matrix ?

☐ $a = 2, c = \frac{1}{\sqrt{12}}$
☐ $a = -1, c = 3$
☐ $a = 0, c = \sqrt{8}$
☐ $a = 1, c = 3$
☐ $a = -1, c = \frac{1}{3}$
☐ $a = 1, c = -\frac{1}{3}$

Opgave 14 (9%)

Lad A være en 12×15 matrix.
Besvar følgende sand/falsk opgaver om A.

1. A er en kvadratisk (square) matrix ☐ Sand ☐ Falsk
2. Col A er et underrum af $\mathcal{R}^{12}$ ☐ Sand ☐ Falsk
3. Col A er et underrum af $\mathcal{R}^{15}$ ☐ Sand ☐ Falsk
4. Col A og Row A har samme dimension ☐ Sand ☐ Falsk
5. Col A og Null A har samme dimension ☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 15 (6%)

Følgende indtastes i MATLABs Command Window:

```
>> u = [1; 1; 1; 1];
>> v = [1; 2; 3; 4];
>> w = [1; 3; 6; 10];
>> x = [1; 4; 10; 19 ];
>> A = [u v w x];
>> rref(A)

ans =

     1     0     0     1
     0     1     0    -3
     0     0     1     3
     0     0     0     0

>> det(A)
```

1. Hvilken af følgende påstande er sand?
   - ☐ v er en rækkevektor
   - ☐ v er en søjlevektor
   - ☐ v er en 2×2 matrix
2. Hvad er MATLABs svar på den sidstnævnte kommando?
   - ☐ -3
   - ☐ -9
   - ☐ 3
   - ☐ 0
   - ☐ 1