# Eksamen i Lineær Algebra

**Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet**

## 6. juni, 2016. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 10 nummererede sider med ialt 15 opgaver. Alle opgaver er "multiple choice" opgaver. **Besvarelsen skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

**Tilladte hjælpemidler:** Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på besvarelsen.

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLDNUMMER:

- ☐ Aalborg Hold 5 (v. Jacob Broe)
- ☐ Aalborg Hold 6 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)
- ☐ Esbjerg Dansk hold (v. Ulla Tradsborg)
- ☐ Esbjerg Engelsk hold (v. Johnny Weile)

*I alle opgaver gælder at der kun er ét korrekt svar til hvert spørgsmål.*

## **Opgave 1** (6 %)

Lad $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4]$ være en matrix med 3 rækker og lad $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]$ være sådan at $C = AB$ er defineret.

1. Hvor mange rækker har matricen $B$?

   ☐ 2
   ☐ 3
   ☐ 4
   ☐ Antal rækker i $B$ kan ikke bestemmes fra det oplyste.

2. Hvor mange rækker har matricen $C$?

   ☐ 2
   ☐ 3
   ☐ 4
   ☐ Antal rækker i $C$ kan ikke bestemmes fra det oplyste.

3. Hvordan kan anden søjle i $C = [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3]$ bestemmes?

   ☐ $\mathbf{c}_2 = A\mathbf{a}_2$ ☐ $\mathbf{c}_2 = B\mathbf{a}_2$ ☐ $\mathbf{c}_2 = A\mathbf{b}_2$ ☐ $\mathbf{c}_2 = B\mathbf{b}_2$

## **Opgave 2** (4 %)

Lad $A$ være en $3 \times n$ matrix og lad $E$ være elementærmatricen $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Hvordan fremkommer matricen $EA$ fra $A$?

☐ Ved at addere 2 gange række 1 til række 3.
☐ Ved at addere 2 gange række 2 til række 3.
☐ Ved at addere 2 gange række 3 til række 2.
☐ Ved at addere 2 gange søjle 1 til søjle 3.
☐ Ved at addere 2 gange søjle 2 til søjle 3.
☐ Ved at addere 2 gange søjle 3 til søjle 2.

**Opgave 3** (10 %)

Lad $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Det oplyses at matricen $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ har følgende reducerede række echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Besvar følgende opgaver om pivot-søjler i $A$:

   Søjle 1 er pivot-søjle. ☐ Sand ☐ Falsk

   Søjle 2 er pivot-søjle. ☐ Sand ☐ Falsk

   Søjle 3 er pivot-søjle. ☐ Sand ☐ Falsk

   Søjle 4 er pivot-søjle. ☐ Sand ☐ Falsk

2. Hvad er nulliteten af $A$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

3. Lad $\mathbf{x}$ være en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hvad er $x_4$ ?

   ☐ 1 ☐ 3
   ☐ 2 ☐ $x_4$ er fri variabel.

4. Besvar følgende sand/falsk opgaver:
   Enhver løsning $\mathbf{x}$ til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ opfylder $x_1 = x_3$.

   ☐ Sand ☐ Falsk

   Løsningsmængden til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er et underrum af $\mathcal{R}^4$

   ☐ Sand ☐ Falsk

**Opgave 4** (10 %)

Lad $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$,
$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\1 & 2 & 0 & -1\\-1 & 0 & 2 & 1\\0 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$, og lad $Q = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3\ \mathbf{q}_4]$.
Man kan se at $\mathcal{B} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\}$ er en ortonormal basis for $\mathcal{R}^4$.

1. Besvar følgende sand/falsk spørgsmål om matricen $Q$.

| | | |
|---|---|---|
| $Q$ er en ortogonal matrix. | ☐ Sand | ☐ Falsk |
| $Q$ er en symmetrisk matrix. | ☐ Sand | ☐ Falsk |
| $Q^{-1} = -Q$ | ☐ Sand | ☐ Falsk |
| $Q^{-1} = Q$ | ☐ Sand | ☐ Falsk |

2. Determinanten af $Q$ er et af følgende tal. Hvilket?

☐ $-3$ ☐ $-1$ ☐ $0$ ☐ $2$ ☐ $5$

3. $T$ betegner nu den lineære operator med standardmatrix $A$. Lad $C = [T]_{\mathcal{B}}$ være matrixrepræsentationen af $T$ med hensyn til basen $\mathcal{B}$. Hvad er $c_{11}$?

☐ $0$ ☐ $1$ ☐ $2$ ☐ $4$ ☐ $8$

**Opgave 5** (10 %)

Det karakteristiske polynomium af

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

er $t(t-2)(t+2)(t-4)$.

1. Hvilken af følgende er en egenværdi for $A$?

   ☐ 1 ☐ 4 ☐ $-4$ ☐ 16

2. Hvilken af følgende er en egenvektor for $A$?

   ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Kan $A$ diagonaliseres?

   ☐ Ja ☐ Nej

4. Har $A$ en invers matrix?

   ☐ Ja ☐ Nej

## **Opgave 6** (10 %)

Lad $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\2\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\-2\\1\end{bmatrix}$ og lad $W = \text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}3\\3\\0\\3\end{bmatrix}$ og lad $\mathbf{w}$ være ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på $W$.

1. Er vektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ortogonale?

   ☐ Ja ☐ Nej

2. Hvad er 2. komponenten af $\mathbf{w}$ (dvs. $w_2$)?

   ☐ $-4$ ☐ $-1$ ☐ $0$ ☐ $1$ ☐ $4$ ☐ $9$

3. Lad $\mathbf{z}$ være ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på $W^\perp$. Hvad er 2. komponenten af $\mathbf{z}$ (dvs. $z_2$)?

   ☐ $-4$ ☐ $-1$ ☐ $0$ ☐ $1$ ☐ $4$ ☐ $9$

4. Hvad er dimensionen af $W^\perp$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

## **Opgave 7** (4 %)

Lad $A = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$. Hvilken af følgende påstande er sand:

☐ $A = A_{90^\circ}$
☐ $A = A_{180^\circ}$
☐ $A = A_{270^\circ}$
☐ $A = A_\theta$ for en anden vinkel $\theta$
☐ $A$ er ikke en rotationsmatrix.

**Opgave 8** (4 %)

Lad $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Lad $C = AB$. Hvad er tallet $c_{23}$ ?

☐ $-7$ ☐ $-2$ ☐ $1$ ☐ $10$ ☐ $13$

**Opgave 9** (6 %)

Lad $A$ og $B$ være $5 \times 5$ matricer med $\det A = 3$ og $\det B = 2$.

1. Hvad er $\det(-2A)$ ?

   ☐ $-486$ ☐ $-96$ ☐ $-6$ ☐ $6$ ☐ $96$ ☐ $486$

2. Hvad er $\det AB^T$ ?

   ☐ $-9$ ☐ $-6$ ☐ $-5$ ☐ $5$ ☐ $6$ ☐ $9$

3. Hvad er $\det AB^{-1}$ ?

   ☐ $1$ ☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $6$ ☐ $-\frac{1}{6}$

**Opgave 10** (4 %)

Lad $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Hvad er determinanten af $A$?

☐ $-8$ ☐ $-5$ ☐ $-2$ ☐ $2$ ☐ $5$ ☐ $8$

**Opgave 11** (10 %)

$T : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ er en lineær transformation med standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det oplyses at $A$ med elementære rækkeoperationer kan omskrives til

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Hvad er værdien af $n$?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

2. Hvad er værdien af $m$?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

3. Hvad er rangen af $A$?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

4. Hvad er dimensionen af nulrummet af $T$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

5. Er $T$ enentydig (en-til-en, injektiv)?

   ☐ Ja ☐ Nej

6. Er $T$ på (surjektiv)?

   ☐ Ja ☐ Nej

**Opgave 12** (7 %)

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}$ og lad $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$.

1. Er $\mathbf{b}$ indeholdt i Col $A$? ☐ Ja ☐ Nej
2. Er $\mathbf{b}$ indeholdt i Null $A$? ☐ Ja ☐ Nej
3. Er $\mathbf{b}$ indeholdt i $(\text{Row } A)^{\perp}$? ☐ Ja ☐ Nej

**Opgave 13** (5 %)

Hvor mange løsninger har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 \quad\;\; - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

☐ ingen
☐ én
☐ to
☐ uendeligt mange.

**Opgave 14** (4 %)

$T : \mathcal{R}^5 \to \mathcal{R}^3$ er en lineær transformation.

1. Hvad er den mindst mulige dimension af nulrummet af $T$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

2. Hvad er den størst mulige dimension af nulrummet af $T$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

**Opgave 15** (6 %)

I MATLABs Command Window er der indtastet følgende matrix:

```
>> A = [1 1 1; 1 1 2; 1 2 2];
```

Det oplyses at `A` har en invers matrix `B`. Hvilken af følgende kombinationer af MATLAB-kommandoer bestemmer den korrekte inverse til `A` ?

☐ `C=rref([A eye(3)]); B=C(4:6,:)`
☐ `C=rref([eye(3) A]); B=C(:,1:3)`
☐ `C=rref([eye(3) A]); B=C(1:3,:)`
☐ `C=rref([A eye(3)]); B=C(:,1:3)`
☐ `C=rref([A eye(3)]); B=C(:,4:6)`
☐ `C=rref([eye(3) A]); B=C(:,4:6)`