To find the English version of the exam, please read from the other end

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Fredag den 8. januar, 2016. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 9 nummererede sider med ialt 15 opgaver. Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der må **ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder ”essay-opgaver”. I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder ”multiple choice” opgaver. Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.

NAVN: ________________________________

STUDIENUMMMER: ________________________________

HOLDNUMMER:

- ☐ Aalborg HOLD 1 (v. Lisbeth Fajstrup)
- ☐ Aalborg HOLD 2 (v. Jacob Broe)
- ☐ Aalborg HOLD 3 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)
- ☐ Aalborg Robotics (v. Diego Ruano)
- ☐ AAU-Cph, Dansk hold (v. Iver Ottosen)
- ☐ AAU-Cph, Engelsk hold (v. Bedia Møller)

Del I ("Essay-opgaver")

Opgave 1 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A.
2. Find en basis for nulrummet hørende til A.
3. Find en basis for rækkerummet hørende til A.

Opgave 2 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Find A^{-1}.
2. Bestem determinanten af A.
3. Bestem determinanten af A^{-1}.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 3 (5%)

Lad R være den reducerede række-echelonform (reducerede trappeform) af matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestem værdien af R_{14}:

☐ $-\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{3}{8}$ ☐ 1 ☐ $-\frac{1}{8}$

Opgave 4 (10%).

Det oplyses, at A er en 4×4-matrix med $\det(A) = 2$. Matricen B er givet ved

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlige* sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

☐ $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$.
☐ $\det(B) = -6$.
☐ $\det(AB) = \det(BA)$.
☐ B er inverterbar (invertibel).
☐ $\det(A^2B^2) = 36$.
☐ Tallet 3 er en egenværdi for B.
☐ B er på reduceret række-echelonform (reduceret trappeform).
☐ Der findes et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$, således at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ikke* har en løsning.
☐ $\det(-B) = -3$.
☐ $\det(AB) = -12$.

Opgave 5 (7%)

Lad

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\} \text{ og } A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 3 & 0\end{bmatrix}.$$

Afkryds for hvert af følgende tre spørgsmål det rigtige svar:

a. Dimensionen af W er lig

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

b. Dimensionen af $W^\perp$ er lig

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

c. Rangen af A er lig

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Opgave 6 (8%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^4$ med dimension 3. Tre lineært uafhængige vektorer i W udgør automatisk en basis for W.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Det oplyses, at Q er en 3×3 matrix med $\det(Q) = 1$. Da er matricen Q ortogonal.

☐ Sand ☐ Falsk

c. Søjlerne i en 4×4 ortogonal matrix P udgør en orthonormal basis for $\mathbf{R}^4$.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Det oplyses, at A er en 4×4 med egenværdierne $1, 2, 0$ og -3. Da er A diagonaliserbar.

☐ Sand ☐ Falsk

e. Det oplyses, at A er en 4×4 matrix med egenværdierne $1, 2, 0$ og -3. Da er A inverterbar (invertibel).

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 7 (5%)

Hvilke af følgende udsagn er sande (bemærk: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning):

- ☐ Fire (4) lineæret uafhængige vektorer i $\mathbf{R}^4$ udgør en basis for $\mathbf{R}^4$
- ☐ Man kan finde en basis for ethvert underrum af $\mathbf{R}^n$.
- ☐ Enhver mængde af vektorer i $\mathbf{R}^n$ kan udvides til en basis for $\mathbf{R}^n$.
- ☐ Lad W være et ikke-trivelt underrum af $\mathbf{R}^n$. Man kan *ikke* altid finde en ortonormal basis for W.

Opgave 8 (5%)

Betragt matricen C givet ved

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Værdien af $\det(C)$ er

☐ 2/3 ☐ -3 ☐ 3 ☐ 6 ☐ -2

Opgave 9 (5%)

Lad

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende 2 sand/falsk opgaver:

i. Vektoren $\mathbf{b}$ ligger i $\mathrm{Col}(A)$.

☐ Sand ☐ Falsk

ii. Vektoren $\mathbf{b}$ ligger i $\mathrm{Nul}(A)$.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 10 (5%)

Følgende basis

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er givet for $\mathbf{R}^3$. Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ og betragt vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende 2 spørgsmål:

i. $\mathcal{B}$ er en ortogonal basis for $\mathbf{R}^3$.

☐ Sand ☐ Falsk

ii. Anden komponent (2. indgang) af koordinatvektoren $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ er givet ved:

☐ $-\sqrt{2}$ ☐ -3 ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Opgave 11 (8%)

Det oplyses, at matricen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 2 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

er række-ækvivalent med

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 19 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 33 & -26 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende fire spørgsmål om A:

a. Rangen af A er

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

b. Givet $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$, så har ligningsystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ altid en løsning.

☐ Sand ☐ Falsk

c. nullity(A) er:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

d. Den lineære transformation $T : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^4$ givet ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er injektiv (engelsk: one-to-one).

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 12 (5%)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3} = 0 \end{cases}$$

Netop ét af følgende udsagn om dette ligningssystem er korrekt. Marker det korrekte udsagn:

- ☐ Ligningssystemet har ingen løsninger
- ☐ Ligningssystemet har uendelig mange løsninger
- ☐ Ligningssystemet har en entydig bestemt løsning
- ☐ Ingen af ovenstående svar er korrekte.

Opgave 13 (5%)

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Netop ét af følgende udsagn er korrekt. Marker det korrekte udsagn:

- ☐ Søjlerne i A er lineært uafhængige
- ☐ $\det(A) = 1$
- ☐ A er ikke inverterbar (invertibel)
- ☐ Ingen af ovenstående mulige svar er korrekte.

Opgave 14 (7%)

Det maksimale antal af lineært uafhængige egenvektorer for matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

er

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Opgave 15 (5%)

Betragt produktet AB af matricerne

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Besvare følgende to spørgsmål.

a. Indgang $(1,1)$ i AB, dvs. $(AB)_{11}$, er lig

☐ -12 ☐ -9 ☐ 1 ☐ -13 ☐ 12

b. Indgang $(3,2)$ i AB, dvs. $(AB)_{32}$, er lig

☐ -10 ☐ -8 ☐ 0 ☐ $\frac{11}{3}$ ☐ 19