

To find the English version of the exam, please read from the other end

Eksamen i Lineær Algebra

**Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet**

Fredag den 8. januar, 2016. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 9 nummererede sider med ialt 15 opgaver. Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der må **ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "essay-opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

- HOLDNUMMER: Aalborg HOLD 1 (v. Lisbeth Fajstrup)
 Aalborg HOLD 2 (v. Jacob Broe)
 Aalborg HOLD 3 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)
 Aalborg Robotics (v. Diego Ruano)
 AAU-Cph, Dansk hold (v. Iver Ottosen)
 AAU-Cph, Engelsk hold (v. Bedia Møller)

Del I ("Essay-opgaver")

Opgave 1 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A .
2. Find en basis for nulrummet hørende til A .
3. Find en basis for rækkerummet hørende til A .

$$1. \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$2. \left\{ \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$3. \left\{ [0, 1, -\frac{1}{3}, 1], [1, 0, \frac{1}{3}, 1] \right\}.$$

Opgave 2 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Find A^{-1} .
2. Bestem determinanten af A .
3. Bestem determinanten af A^{-1} .

$$1. \begin{bmatrix} -3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$2. -4$$

$$3. -\frac{1}{4}$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 3 (5%)

Lad R være den reducerede række-echelonform (reducerede trappeform) af matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestem værdien af R_{14} :

- $-\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{8}$ 1 $-\frac{1}{8}$

Opgave 4 (10%).

Det oplyses, at A er en 4×4 -matrix med $\det(A) = 2$. Matricen B er givet ved

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlig*e sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

- $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$.
 $\det(B) = -6$.
 $\det(AB) = \det(BA)$.
 B er inverterbar (invertibel).
 $\det(A^2B^2) = 36$.
 Tallet 3 er en egen værdi for B .
 B er på reduceret række-echelonform (reduceret trappeform).
 Der findes et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$, således at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ikke* har en løsning.
 $\det(-B) = -3$.
 $\det(AB) = -12$.

Opgave 5 (7%)

Lad

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ og } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Afkryds for hvert af følgende tre spørgsmål det rigtige svar:

a. Dimensionen af W er lig

- 0 1 2 3 4

b. Dimensionen af W^\perp er lig

- 0 1 2 3 4

c. Rangnen af A er lig

- 0 1 2 3 4

Opgave 6 (8%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. Lad W være et underrum af \mathbf{R}^4 med dimension 3. Tre lineært uafhængige vektorer i W udgør automatisk en basis for W .

- Sand Falsk

b. Det oplyses, at Q er en 3×3 matrix med $\det(Q) = 1$. Da er matricen Q ortogonal.

- Sand Falsk

c. Søjlerne i en 4×4 ortogonal matrix P udgør en orthonormal basis for \mathbf{R}^4 .

- Sand Falsk

d. Det oplyses, at A er en 4×4 med egenverdierne 1, 2, 0 og -3 . Da er A diagonaliserbar.

- Sand Falsk

e. Det oplyses, at A er en 4×4 matrix med egenverdierne 1, 2, 0 og -3 . Da er A inverterbar (invertibel).

- Sand Falsk

Opgave 7 (5%)

Hvilke af følgende udsagn er sande (bemærk: hver forkert afkrydsning op-
hæver én rigtig afkrydsning):

- Fire (4) lineæret uafhængige vektorer i \mathbf{R}^4 udgør en basis for \mathbf{R}^4
- Man kan finde en basis for ethvert underrum af \mathbf{R}^n .
- Enhver mængde af vektorer i \mathbf{R}^n kan udvides til en basis for \mathbf{R}^n .
- Lad W være et ikke-trivelt underrum af \mathbf{R}^n . Man kan *ikke* altid finde en ort-
honormal basis for W .

Opgave 8 (5%)

Betragt matricen C givet ved

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Værdien af $\det(C)$ er

- 2/3 -3 3 6 -2

Opgave 9 (5%)

Lad

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende 2 sand/falsk opgaver:

i. Vektoren \mathbf{b} ligger i $\text{Col}(A)$.

Sand

Falsk

ii. Vektoren \mathbf{b} ligger i $\text{Nul}(A)$.

Sand

Falsk

Opgave 10 (5%)

Følgende basis

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er givet for \mathbf{R}^3 . Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ og betragt vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende 2 spørgsmål:

i. \mathcal{B} er en ortogonal basis for \mathbf{R}^3 .

Sand

Falsk

ii. Anden komponent (2. indgang) af koordinatvektoren $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ er givet ved:

$-\sqrt{2}$

-3

1

2

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Opgave 11 (8%)

Det oplyses, at matricen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 2 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

er række-ækvivalent med

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 19 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 33 & -26 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende fire spørgsmål om A :

a. Rangnen af A er

- 1 2 3 4 5 6

b. Givet $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$, så har ligningsystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ altid en løsning.

- Sand Falsk

c. nullity(A) er:

- 0 1 2 3 4 5

d. Den lineære transformation $T : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^4$ givet ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er injektiv (engelsk: one-to-one).

- Sand Falsk

11.c
English version:
Options are 1-6.
Grader is aware
of this issue.

Opgave 12 (5%)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Netop ét af følgende udsagn om dette ligningssystem er korrekt. Marker det korrekte udsagn:

- Ligningssystemet har ingen løsninger
- Ligningssystemet har uendelig mange løsninger
- Ligningssystemet har en entydig bestemt løsning
- Ingen af ovenstående svar er korrekte.

Opgave 13 (5%)

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Netop ét af følgende udsagn er korrekt. Marker det korrekte udsagn:

- Søjlerne i A er lineært uafhængige
- $\det(A) = 1$
- A er ikke inverterbar (invertibel)
- Ingen af ovenstående mulige svar er korrekte.

Opgave 14 (7%)

Det maksimale antal af lineært uafhængige egenvektorer for matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

er

- 0 1 2 3 4 5

Opgave 15 (5%)

Betragt produktet AB af matricerne

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Besvare følgende to spørgsmål.

a. Indgang $(1,1)$ i AB , dvs. $(AB)_{11}$, er lig

- 12 -9 1 -13 12

b. Indgang $(3,2)$ i AB , dvs. $(AB)_{32}$, er lig

- 10 -8 0 $\frac{11}{3}$ 19