Facit til opgaver

To find the English version of the exam, please read from the other end

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

6. januar, 2015. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver. Printet to-sidet.

Der må gøres brug af bøger, noter, fotokopier mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn samt studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne. På hver side af besvarelsen skal både sidetallet og det samlede antal sider fremgå**. God arbejdslyst!

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

HOLDNUMMER:

- ☐ Aalborg HOLD 1 (v. Lisbeth Fajstrup.
- ☐ Aalborg HOLD 2 (v. Olav Geil).
- ☐ Aalborg HOLD 3 (v. Leif Kjær Jørgensen).
- ☐ Aalborg HOLD 4 (v. Morten Nielsen).
- ☐ Aalborg HOLD 5 (v. Jacob Broe).
- ☐ Aalborg HOLD 6 (v. Diego Ruano).
- ☐ AAU-Cph, Dansk hold (v. Iver Ottosen).
- ☐ Esbjerg, Dansk hold (v. Ulla Tradsborg).

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

1. Find samtlige løsninger til ligningssystemet $Ax = \mathbf{b}$.

Reduceret totalmatrix $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ løsninger $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Opgave 2 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Afgør og begrund i hvert af følgende tilfælde, om udtrykket giver mening. For hvert udtryk, der giver mening, beregn værdien.

1 og 2 Giver ikke mening da A er 2x2 og B,C er 3xp

1. AB 2. AC 3. BC 4. $A\mathbf{d}$

$BC = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $Bd = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$

Opgave 3 (7%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1. Bestem A^{-1}.
2. Bestem $(A^T)^{-1}$.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Opgave 4 (7%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1. Find en basis for nulrummet hørende til A.
2. Find en basis for søjlerummet hørende til A.

$\text{Null}\, A = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\text{Col}\, A = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

Opgave 5 (10%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Find egenværdierne for A. $\lambda = 3$ og $\lambda = 2$
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum. $\lambda = 2$: $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ $\lambda = 3$: $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
3. Afgør, om A er diagonaliserbar. Find i så fald matricer P og D, så D er diagonal, P er invertibel (regulær) og $A = PDP^{-1}$.

A er diagonaliserbar.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Opgave 6 (10%).

Underrummet W af $\mathbb{R}^4$ har basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_2} \right\}$$

1. Vis, at vektoren $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ligger i $W^\perp$. $w \cdot b_1 = 0$ og $w \cdot b_2 = 0$
2. Find en basis for $W^\perp$. $W^\perp = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Opgave 7 (8%).

Lad

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Bestem en ortogonal basis for W ved hjælp af Gram Schmidt processen.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Bestem herefter en ortonormal basis for W.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Opgave 8 (9%).

Lad

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

og lad $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, hvis matrix mht. $\mathcal{B}$ er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Vis, at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ har rang 3

2. Lad $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{u}$.

$$u = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Bestem $[T(\mathbf{u})]_{\mathcal{B}}$ og $T(\mathbf{u})$.

$$[T(u)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(u) = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (6%).

Matricerne A og B er 3×3 og $\det A = 2$ og $\det B = -1$. Afkryds for hvert af følgende tre spørgsmål det rigtige svar:

$\det(AB^T)$ er

☐ -3 ☒ -2 ☐ -1 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

$\det(2A)$ er

☐ -4 ☐ -2 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 8 ☒ 16

$\det(A^{-1}BA)$ er

☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ -2 ☒ -1 ☐ -4 ☐ 2 ☐ $\frac{1}{2}$

Opgave 10 (8%).

Lad

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det oplyses, at R er den reducerede trappeform (reduceret echelonform) af en matrix A

Afkryds for hvert af følgende tre spørgsmål det rigtige svar:

Rangen af A er

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6

☐ ikke mulig at bestemme udfra R

Dimensionen af nulrummet (nullity) for A er

☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

☐ ikke mulig at bestemme udfra R.

Dimensionen af rækkerummet for A er

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6

☐ ikke mulig at bestemme udfra R.

Opgave 11 (8%).

Vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ ligger i $\mathbf{R}^3$.
Vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er lineært uafhængige.
A er matricen med søjlevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$.

Afkryds de sande udsagn nedenfor. Der er ialt fem.
Bemærk, at hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning. To rigtige og én forkert afkrydsning tæller for eksempel som én rigtig. Der gives ikke negative point, så én rigtig og tre forkerte tæller som nul rigtige. :

- ☐ Span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ har dimension 4.
- ☒ Span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ har dimension 3.
- ☐ Man kan ikke sige, hvad dimensionen af Span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ er.
- ☒ $\mathbf{v}_4$ ligger i Span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
- ☒ A er en 3×4 matrix.
- ☐ A er en 4×3 matrix.
- ☒ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ udspænder $\mathbf{R}^3$.
- ☐ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ er en basis for $\mathbf{R}^3$.
- ☒ Ligningen $Ax = \mathbf{b}$ har mindst en løsning.
- ☐ Ligningen $Ax = \mathbf{b}$ har højst en løsning.
- ☐ Ligningen $Ax = \mathbf{b}$ har præcis en løsning.

Opgave 12 (8%).

I denne opgave ser vi på lineære operatorer fra $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^2$.

Matricerne A og B er begge 2×2. A er standardmatricen for en spejling omkring en linje i $\mathbb{R}^2$ og B er standardmatricen for en rotation med en vinkel θ, hvor $0° < \theta < 90°$.

Besvar følgende fem sand/falsk opgaver:

a. $\det A = 1$ Nej, $\det A = -1$

☐ Sand ☒ Falsk

b. AB repræsenterer en rotation. Nej, en spejling

☐ Sand ☒ Falsk

c. B har to forskellige egenværdier. Nej, ingen egenværdier

☐ Sand ☒ Falsk

d. A har to forskellige egenværdier.

☒ Sand ☐ Falsk

e. $A^{-1} = A$.

☒ Sand ☐ Falsk

Her slutter eksamenssættet på dansk