Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

7. januar, 2014. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter, fotokopier mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn samt studienummer på hver side af besvarelsen.
Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.
God arbejdslyst!

NAVN: ____________________

STUDIENUMMMER: ____________________

HOLDNUMMER:

- ☐ Aalborg HOLD 1 (v. Mikkel H. Brynildsen.
- ☐ Aalborg HOLD 2 (v. Olav Geil).
- ☐ Aalborg HOLD 3 (v. Leif Kjær Jørgensen).
- ☐ Aalborg HOLD 4 (v. Morten Nielsen).
- ☐ Aalborg HOLD 5 (v. Jacob Broe).
- ☐ AAU-Cph, Dansk hold (v. Iver Ottosen).
- ☐ Esbjerg, Dansk hold (v. Ulla Tradsborg).

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (10%).

Betragt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 1. \end{array}$$

1. Opskriv den tilhørende koefficientmatrix.
2. Opskriv den tilhørende udvidede matrix (totalmatrix, på engelsk augmented matrix).
3. Løs ligningssystemet.

Opgave 2 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Afgør i hvert af følgende fire tilfælde, om udtrykket giver mening. For hvert udtryk, der giver mening, beregn værdien. Hvis udtrykket ikke giver mening, skriv da "giver ikke mening".

1. AB 2. BA 3. BC 4. $A(B+C)$.

Opgave 3 (7%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Bestem A^{-1}.
2. Find determinanten af A.

Opgave 4 (7%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A.
2. Find en basis for rækkerummet hørende til A.

Opgave 5 (10%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Find egenværdierne for A.
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum.

Opgave 6 (10%).

Underrummet W af $\mathbb{R}^4$ har basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Bestem en ortogonal basis for W ved hjælp af Gram-Schmidt processen.
2. Bestem herefter en ortonormal basis for W.

Opgave 7 (8%).

Lad

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Argumenter for, at
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$
er en ortonormal basis for W.

2. Find $\mathbf{w}$ og $\mathbf{z}$ således, at $\mathbf{w}$ tilhører W, $\mathbf{z}$ tilhører $W^{\perp}$, og $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$.

Opgave 8 (9%).

Lad $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær transformation. Det oplyses, at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

1. Find $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

2. Find $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

3. Bestem standardmatricen for T (dvs. bestem A så $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$).

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (6%).

Lad $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ og $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Afkryds for hvert af følgende tre spørgsmål det rigtige svar:

Dimensionen af W er lig

☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3

Dimensionen af $W^\perp$ er lig

☐ 0 ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3

nullity A er lig

☐ 0 ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3

Opgave 10 (8%).

A er en 4×4 matrix med determinant $\det A = -3$.

Afkryds for hvert af følgende fire spørgsmål det rigtige svar:

$\det(A^2) =$

☐ -9	☐ -6	☐ 0	☐ 6	☒ 9

$\det(A^{-1}) =$

☐ -1	☒ $-\frac{1}{3}$	☐ 0	☐ $\frac{1}{3}$	☐ 1

$\det(A^T) =$

☒ -3	☐ -1	☐ 0	☐ 1	☐ 3

$\det(A^T A) =$

☐ -9	☐ 1	☐ 0	☐ 3	☒ 9

Opgave 11 (8%).

Lad A og B være $n \times n$ matricer med $\det A \neq 0$ og $\det B \neq 0$. Lad O være $n \times n$ matricen med 0 i samtlige indgange (elementer). Lad I_n være identitetsmatricen (enhedsmatricen) af størrelse (format) $n \times n$.

Besvar følgende fire sand/falsk opgaver:

a. Der gælder $(AB)^T - B^T A^T = O$.

☒ Sand ☐ Falsk

b. Der gælder $(AB)^{-1} A = B^{-1}$.

☒ Sand ☐ Falsk

c. Der gælder $\det(AB) = 0$.

☐ Sand ☒ Falsk

d. Der gælder $B^{-1} A^{-1} A B = I_n$.

☒ Sand ☐ Falsk

Opgave 12 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Besvar følgende tre sand/falsk opgaver:

a. Der gælder $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

☒ Sand ☐ Falsk

b. Der gælder $T_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

☒ Sand ☐ Falsk

c. Der gælder $T_{AB} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

☒ Sand ☐ Falsk

Delvis facitliste Eksamen 7. januar 2014

<u>opg. 1</u>

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ eller $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right]$

3. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>opg. 2</u>

1. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

3. "giver ikke mening"

4. "giver ikke mening"

<u>opg. 3</u>

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. -1

<u>opg. 4</u>

1. Eksempelvis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$

2. Eksempelvis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Delvis facitliste eksamen 7. januar 2014

<u>opg. 5</u>

1. $0, 2$
2. for $\lambda = 0$ eksempelvis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

   for $\lambda = 2$ eksempelvis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

<u>opg. 6</u>

1. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

2. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

<u>opg. 7</u>

1.
2. $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   $\bar{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

<u>opg. 8</u>

1. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$