Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Tirsdag den 8. januar, 2013. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter, fotokopier mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLDNUMMER:

- ☐ Aalborg HOLD 1 (v. Lisbeth Fajstrup).
- ☐ Aalborg HOLD 2 (v. Olav Geil).
- ☐ Aalborg HOLD 3 (v. Leif Kjær Jørgensen).
- ☐ Aalborg HOLD 4 (v. Bo Rosbjerg).
- ☐ Aalborg HOLD 5 (v. Jacob Broe).
- ☐ AAU-Cph, Dansk hold (v. Aage Nielsen og Iver Ottosen).
- ☐ Esbjerg, Dansk hold (v. Ulla Tradsborg).

Del I (”almindelige opgaver”)

Opgave 1 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. Bring A på reduceret trappeform (reduceret echelonform, reduceret række-echelonform).
2. Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eller argumenter for, at den ikke har nogen løsning.
3. Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ eller argumenter for, at den ikke har nogen løsning.

Opgave 2 (6%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Afgør i hvert af følgende fire tilfælde, om udtrykket giver mening. For hvert udtryk, der giver mening, beregn værdien. Hvis udtrykket ikke giver mening, skriv da “giver ikke mening”.

1. $(A\mathbf{c}) + \mathbf{d}$ 2. AB 3. BA 4. $\mathbf{c}^T A$.

Opgave 3 (5%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Bestem A^{-1}.

Opgave 4 (8%).

Lad $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær transformation givet ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}.$$

1. Opskriv standardmatricen A hørende til T.
2. Opskriv standardmatricen for den inverse lineære transformation.

Opgave 5 (10%).

I denne opgave arbejdes der med en lineær transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Betragt basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Matrixrepræsentationen af T med hensyn til $\mathcal{B}$ (også kaldet $\mathcal{B}$-matricen for T) er givet ved

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Find $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ og $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.
2. Find standardmatricen A for T.
3. Hvilken geometrisk operation svarer T til?

Opgave 6 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenværdierne hørende til A.
2. Find for hver af ovenstående egenværdier en basis for det tilhørende egenrum.
3. Er A diagonaliserbar? (husk at argumentere for dit svar).
4. Argumenter for, at $A^{1057} = A$.

Opgave 7 (12%).

Lad $W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \right\}$ og $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1. Argumenter for, at $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \right\}$ er en ortonormal basis for W.
2. Find $\mathbf{w}$ i W og $\mathbf{z}$ i $W^{\perp}$ så $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$.
3. Bestem den ortogonale projektionsmatrix P_W.
4. Find en basis for det ortogonale komplement $W^{\perp}$.

Opgave 8 (10%).

Underrummet W af $\mathbb{R}^5$ har basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Bestem en ortogonal basis for W ved hjælp af Gram-Schmidt processen.
2. Er den fundne ortogonale basis også en ortonormal basis? (husk at argumentere for dit svar).

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (5%).

Det oplyses, at A er en 3×3 symmetrisk matrix. Endvidere oplyses det, at $\mathbf{u}$ er en tilhørende egenvektor med egenværdien 2, og at $\mathbf{v}$ er en tilhørende egenvektor med egenværdien -1.
Præcis et af følgende udsagn er korrekt. Afkryds dette.

☐ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
☐ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2$.
☐ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2$.

Opgave 10 (6%).

A er en $n \times n$ matrix hvorom der gælder, at $\det\left(A^3\right) = -27$. Afkryds for hvert af følgende to spørgsmål det rigtige svar.

$\det(A) =$

☐ -24 ☐ -9 ☐ -3 ☐ 3 ☐ 9 ☐ 24

$\det(A^T A^{-1}) =$

☐ -81 ☐ -9 ☐ -1 ☐ 1 ☐ 9 ☐ 81

Opgave 11 (10%).

Betragt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Lad $A = [\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2\, \mathbf{u}_3\, \mathbf{u}_4]$ og $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$. Afkryds sande udsagn blandt de 10 udsagn nedenfor.

(*Alene de udsagn, du afkrydser indgår i bedømmelsen. Blandt de udsagn, du afkrydser vil et forkert afkrydset udsagn ophæve et korrekt afkrydset udsagn. Har du eksempelvis afkrydset 5 udsagn, hvoraf 4 er korrekte, men 1 er forkert, så får du point for 4-1=3 korrekte svar. Har du afkrydset 4 udsagn, af hvilke 2 er korrekte, men 2 er forkerte, da får du point for 2-2=0 korrekte svar. Du kan ikke opnå en negativ score. Så hvis du har afkrydset 4 udsagn, hvoraf 1 er korrekt, men 3 er forkerte, ja så får du point for 0 korrekte svar.*)

- ☐ Dimensionen af W er 2.
- ☐ Dimensionen af W er 3.
- ☐ Dimensionen af W er 4.
- ☐ A er invertibel (inverterbar, regulær).
- ☐ $\det(A) = 0$.
- ☐ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ udgør en basis for W.
- ☐ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ udgør en basis for W.
- ☐ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ udgør en basis for W.
- ☐ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4\}$ udgør en basis for W.
- ☐ $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = W$.

Opgave 12 (8%).

Lad $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ og definer funktionen (afbildningen) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Besvar følgende fem sand/falsk opgaver:

a. T er en lineær transformation.

☐ Sand ☐ Falsk

b. T er surjektiv (Alternativt dansk udtryk: På. Engelsk udtryk: Onto).

☐ Sand ☐ Falsk

c. T er injektiv (Alternative danske udtryk: En-til-en, enentydig. Engelsk udtryk: One-to-one.).

☐ Sand ☐ Falsk

d. T er invertibel (inverterbar).

☐ Sand ☐ Falsk

e. T beskriver en rotation.

☐ Sand ☐ Falsk