QR-faktorisering

Her uddybes QR-faktorisering med udgangspunkt i SIF kapitlet om Ortogonalitet, afsnit Orthogonal Vectors, (6.2 eller 7.2),

Lad A være en $m \times n$ matrix, hvis søjler er lineært uafhængige. Da findes en ortogonal matrix Q og en øvre triangulær matrix R, så $A = QR$.

Argumentet og algoritmen til at finde Q og R går via Gram Schmidt som følger: Kald søjlerne i A $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Gram Schmidt proceduren, som finder en ortogonal basis $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$med samme span som $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, er

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$,
- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1$ (projektionen af $\mathbf{a}_2$ på $\mathbf{v}_1$ trækkes fra $\mathbf{a}_2$),
- $\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - (\frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|^2}\mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1)$ (projektionen af $\mathbf{a}_3$ på span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ trækkes fra $\mathbf{a}_3$).
- Generelt $\mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j - (\frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_{j-1}}{|\mathbf{v}_{j-1}|^2}\mathbf{v}_{j-1} + \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_{j-2}}{|\mathbf{v}_{j-2}|^2}\mathbf{v}_{j-2} + \cdots + \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1)$

Søjlerne i matricen Q er $\mathbf{q}_j = \frac{1}{|\mathbf{v}_j|}\mathbf{v}_j$. Disse er ortonormale, da Gram Schmidt algoritmen finder ortogonale vektorer.

Fra det generelle udtryk for $\mathbf{v}_j$ fås

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{v}_j + (\frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_{j-1}}{|\mathbf{v}_{j-1}|^2}\mathbf{v}_{j-1} + \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_{j-2}}{|\mathbf{v}_{j-2}|^2}\mathbf{v}_{j-2} + \cdots + \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1)$$

Specielt er $\mathbf{a}_j$ en linearkombination af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_j$ og dermed af $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_j$.

$$\mathbf{a}_j = |\mathbf{v}_j|\mathbf{q}_j + (\frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_{j-1}}{|\mathbf{v}_{j-1}|}\mathbf{q}_{j-1} + \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_{j-2}}{|\mathbf{v}_{j-2}|}\mathbf{q}_{j-2} + \cdots + \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\mathbf{q}_1)$$

Derfor er $A = QR$, hvor R er øvre triangulær og $r_{ij} = \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}$. Specielt er diagonalindgangene $r_{ii} = |\mathbf{v}_i|$, da $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ pga. ortogonalitet..

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8848
-

FAJSTRUP@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~FAJSTRUP