Eksempel på muligt eksamenssæt i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

???dag den ?. ????, 20??. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 13 nummererede sider med ialt 17 opgaver.

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "essay-opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLD:
☐ Matematik, Matematikøkonomi, Fysik.
☐ Datalogi, Software

Del I: ("Essay-opgaver")

Opgave 1 (10 %).

Giv et induktionsbevis for resultatet $\sum_{i=1}^{n}(2i) = n(n+1)$.

Opgave 2 (10 %).

En mængde S, $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, er defineret rekursivt ved

- $(0, 0) \in S$,
- hvis $(a, b) \in S$ så er $(a+1, b+3), (a+2, b+2)$ og $(a+3, b+1)$ også i S.

1. Vis at $(4, 8) \in S$.
2. Vis ved strukturel induktion at 4 går op i $a + b$ for alle $(a, b) \in S$.

Del II: ("Multiple choice" opgaver)

Opgave 3 (4 %).

Mængden S er givet rekursivt ved

$$\begin{array}{l} 1 \in S \\ \text{Hvis } \; x \in S \; \text{ så } \; x+5 \in S \; \text{ og } \; x-5 \in S \end{array}$$

Hvilket af følgende tal ligger i S? (sæt alene et kryds)

☐ -6 ☐ 0 ☐ 11 ☐ 15

Opgave 4 (6 %).

Lad $A = \{a, b, c, d, e\}$ og betragt relationen $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, e)\}$. Hvilket af følgende talpar ligger i den transitive afslutning R^*? (Sæt alene et kryds)

☐ (a, d) ☐ (a, a) ☐ (e, a) ☐ (c, a)

Antallet af talpar i den transitive afslutning R^* er lig (Sæt alene et kryds)

☐ 4 ☐ 5 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 11

Opgave 5 (6%).

Betragt funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)(7x^3 + 2x^2)$. Det oplyses at $f(x)$ er $\mathcal{O}(x^3)$

a. $(C, k) = (9, 1)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☐ JA ☐ NEJ

b. $(C, k) = (9, 2)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☐ JA ☐ NEJ

c. $(C, k) = (9, 0)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☐ JA ☐ NEJ

d. $(C, k) = (1, 1)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☐ JA ☐ NEJ

e. $(C, k) = (10, 1)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☐ JA ☐ NEJ

f. $(C, k) = (0, 0)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☐ JA ☐ NEJ

Opgave 6 (6 %).

I denne opgave tilhører x mængden af heltal. Det vil sige definitionsmængden er lig $\mathbb{Z}$. Betragt følgende udsagnsfunktioner på $\mathbb{Z}$:

$$P(x): \quad ''x \text{ er mindre end } 5'' \tag{1}$$
$$Q(x): \quad ''2 \text{ går op i } x'' \tag{2}$$
$$R(x): \quad ''x \text{ er større end } 7'' \tag{3}$$

Afkryds sandhedsværdien af følgende 6 logiske udsagn:

a. $P(2)$

☐ Sand ☐ Falsk

b. $Q(5)$

☐ Sand ☐ Falsk

c. $P(2) \wedge R(10)$

☐ Sand ☐ Falsk

d. $\big(P(2) \wedge Q(5)\big) \vee R(12)$

☐ Sand ☐ Falsk

e. $\forall x(P(x) \vee R(x))$

☐ Sand ☐ Falsk

f. $\exists x((\neg(P(x) \vee R(x))) \wedge Q(x))$

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 7 (4 %).

Betragt følgende algoritme:

```
Procedure sum(n: positivt heltal)
s := 0
for i := 1  to n
    for j := 1  to n
        s:=s+1
 return s
```

Worst-case tids-kompleksiteten af procedure sum er (sæt alene et kryds)

☐ $\mathcal{O}(n)$ ☐ $\mathcal{O}(n \log n)$ ☐ $\mathcal{O}(n^2)$ ☐ $\mathcal{O}(n^{3/2})$

Opgave 8 (6 %).

Betragt mængderne $A = \{1, 2\}$ og $B = \{2, 3, 4\}$.

a. Hvilket af følgende elementer tilhører $A \times B$? (Sæt alene et kryds)

☐ $(1, 1)$ ☐ $(2, 2)$ ☐ $(3, 3)$ ☐ $(4, 1)$

b. Hvad er kardinaliteten af $A \times B$? (Sæt alene et kryds)

☐ 6 ☐ 12 ☐ 16 ☐ 32 ☐ 64

c. Hvad er kardinaliteten af $\mathcal{P}(A \times B)$? (Sæt alene et kryds)

☐ 12 ☐ 16 ☐ 32 ☐ 64 ☐ 128

d. Ligger $\{(1, 3), (2, 2)\}$ i $\mathcal{P}(A \times B)$? (Sæt alene et kryds)

☐ JA ☐ NEJ

Opgave 9 (6 %).

Besvar følgende seks JA/NEJ spørgsmål:

a. Gælder der $\sum_{i=1}^{7} 1 = 7$?

☐ JA ☐ NEJ

b. Gælder der $\sum_{k=0}^{7} k = 8$?

☐ JA ☐ NEJ

c. Gælder der $\sum_{s=1}^{n} 1 = n + 1$?

☐ JA ☐ NEJ

d. Gælder der $\sum_{i=2}^{4} (i^2 + 1) = 30$?

☐ JA ☐ NEJ

e. Gælder der $\sum_{i=1}^{n} i = n(n + 1)/2$?

☐ JA ☐ NEJ

f. Gælder der, at mængden $\{\frac{a}{b} \mid a, b$ er positive heltal, $a > b\}$ er tællelig?

☐ JA ☐ NEJ

Opgave 10 (6 %).

Lad $(x+y)^5 = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5$, hvor a, b, c, d, e, f er heltal.

a. Der gælder $b = e$

☐ JA ☐ NEJ

b. Der gælder at c er lig (sæt alene et kryds)

☐ 5 ☐ 10 ☐ 20 ☐ -20 ☐ 60

Lad $(2x-y)^4 = gx^4 + hx^3y + ix^2y^2 + jxy^3 + ky^4$, hvor g, h, i, j, k er heltal.

c. Der gælder at h er lig (sæt alene et kryds)

☐ -16 ☐ 16 ☐ 32 ☐ -32

d. Der gælder at j er lig (sæt alene et kryds)

☐ -8 ☐ 8 ☐ 12 ☐ -12

Opgave 11 (4 %).

a. Hvor mange punkter (vertices) er der i et træ med 12 kanter (edges)? (Sæt alene et kryds)

☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 24

b. Hvor mange kanter (edges) er der i et træ med 12 punkter (vertices)? (Sæt alene et kryds)

☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 24

c. Hvor mange kanter (edges) er der i den komplette graf K_7 med 7 punkter (vertices)? (Sæt alene et kryds)

☐ 7 ☐ 8 ☐ 20 ☐ 21 ☐ 42

Opgave 12 (9 %).

Betragt grafen $G = (V, E)$ med nabomatrix (adjacency matrix)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Hvor mange punkter (vertices) har grafen G? (Sæt alene et kryds)

☐ 6 ☐ 12 ☐ 24 ☐ 48

b. Hvor mange kanter (edges) har grafen G? (Sæt alene et kryds)

☐ 6 ☐ 8 ☐ 12 ☐ 20

c. Har grafen G en Hamiltonkreds (Hamilton circuit)?

☐ JA ☐ NEJ

d. Har grafen G en Eulerkreds (Euler circuit)?

☐ JA ☐ NEJ

Opgave 13 (8 %).

a. $(603 \cdot 6004 + 60005) \mod 6$ er lig (sæt alene et kryds)

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

b. $(603 \cdot 6004 + 60005) \mod 10$ er lig (sæt alene et kryds)

☐ 0 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8
☐ 1 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 7 ☐ 9

Opgave 14 (2 %).

Hvad er den størst fælles divisor af 91 og 161?

☐ 1 ☐ 3 ☐ 7 ☐ 13

Opgave 15 (6 %).

I denne opgave betragtes følgende sæt af kongruensligninger

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

hvor vi forlanger at x skal være ikke-negativt.

a. Er $x = 31$ en løsning?

☐ JA ☐ NEJ

b. Er $x = 25$ en løsning?

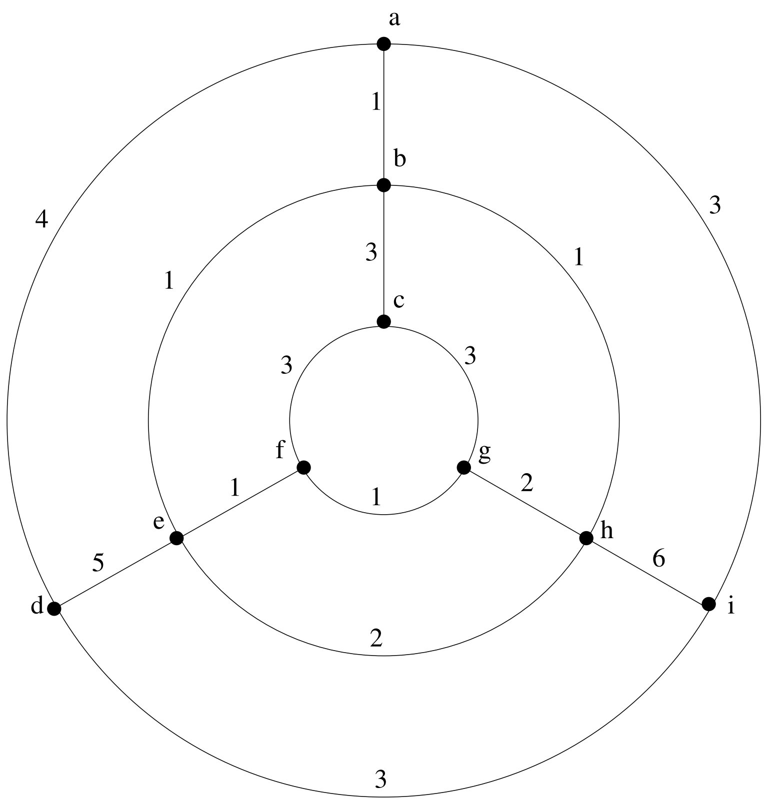
☐ JA ☐ NEJ

c. Der er præcis en løsning som er mindre end 60?

☐ JA ☐ NEJ

d. Der er præcis to løsninger som er mindre end 120?

☐ JA ☐ NEJ



Figur 1:

Opgave 16 (3 %).

Hvad er vægten af et minimum vægt udspændende træ for grafen i figur 1?

☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15 ☐ 16 ☐ 17

Opgave 17 (4 %).

Antag at Dijkstras algoritme benyttes til at bestemme længden af en korteste vej fra a til g i grafen i figur 1. Hvilket af følgende punkter tilføjes da *først* til mængden S?

☐ c ☐ d ☐ e ☐ f