Del I: ("Essay-opgaver")

Opgave 1 (10 %).

Giv et induktionsbevis for resultatet $\sum_{i=1}^{n}(2i) = n(n+1)$.

Opgave 2 (10 %).

En mængde S, $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, er defineret rekursivt ved

- $(0,0) \in S$,
- hvis $(a,b) \in S$ så er $(a+1, b+3)$, $(a+2, b+2)$ og $(a+3, b+1)$ også i S.

1. Vis at $(4,8) \in S$.
2. Vis ved strukturel induktion at 4 går op i $a+b$ for alle $(a,b) \in S$.

Opgave 1

Basis: Show that the statement holds for $n=1$.

$$\sum_{i=1}^{1} 2i = 2 \cdot 1 = 2 = 1 \cdot (1+1)$$

Inductive step: Let $n \geq 1$. Assume that $\sum_{i=1}^{n}(2i) = n(n+1)$ is true.
We want to prove that $\sum_{i=1}^{n+1}(2i) = (n+1)(n+2)$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i) = \sum_{i=1}^{n}(2i) + 2(n+1)$$
$$= n(n+1) + 2(n+1) \quad \text{(by induction)}$$
$$= (n+2)(n+1) \quad \square$$

Opgave 2

1. As $(0,0) \in S$, we have that $(0+1, 0+3) = (1,3) \in S$.
   As $(1,3) \in S$, we have that $(1+1, 3+3) = (2,6) \in S$.
   As $(2,6) \in S$, we have that $(2+2, 6+2) = (4,8) \in S$.

2. Basis: $(0,0) \in S$ and $0+0 = 4 \cdot 0$.

Inductive step: Assume $(a,b) \in S$ and an integer $k \geq 0$ such that $a+b = 4k$.

As $(a,b) \in S$, we have that:

- $(a+1, b+3) \in S$ and
  $$a+1+b+3 = a+b+4 = 4k+4 = 4(k+1)$$
- $(a+2, b+2) \in S$ and
  $$a+2+b+2 = a+b+4 = 4k+4 = 4(k+1)$$
- $(a+3, b+1) \in S$ and
  $$a+3+b+1 = a+b+4 = 4k+4 = 4(k+1)$$

$\square$

Del II: ("Multiple choice" opgaver)

Opgave 3 (4 %).

Mængden S er givet rekursivt ved

$$\begin{array}{l} 1 \in S \\ \text{Hvis } x \in S \text{ så } x+5 \in S \text{ og } x-5 \in S \end{array}$$

Hvilket af følgende tal ligger i S? (sæt alene et kryds)

☐ -6 ☐ 0 ☒ 11 ☐ 15

Opgave 4 (6 %).

Lad $A = \{a, b, c, d, e\}$ og betragt relationen $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, e)\}$. Hvilket af følgende talpar ligger i den transitive afslutning R^*? (Sæt alene et kryds)

☒ (a, d) ☐ (a, a) ☐ (e, a) ☐ (c, a)

Antallet af talpar i den transitive afslutning R^* er lig (Sæt alene et kryds)

☐ 4 ☐ 5 ☐ 7 ☒ 8 ☐ 9 ☐ 11

Opgave 5 (6%).

Betragt funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)(7x^3 + 2x^2)$. Det oplyses at $f(x)$ er $\mathcal{O}(x^3)$

a. $(C, k) = (9, 1)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☒ JA ☐ NEJ

b. $(C, k) = (9, 2)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☒ JA ☐ NEJ

c. $(C, k) = (9, 0)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☐ JA ☒ NEJ

d. $(C, k) = (1, 1)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☐ JA ☒ NEJ

e. $(C, k) = (10, 1)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☒ JA ☐ NEJ

f. $(C, k) = (0, 0)$ kan benyttes som vidner for ovenstående udsagn

☐ JA ☒ NEJ

Opgave 6 (6 %).

I denne opgave tilhører x mængden af heltal. Det vil sige definitionsmængden er lig $\mathbb{Z}$. Betragt følgende udsagnsfunktioner på $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} P(x): &\quad \text{"}x\text{ er mindre end }5\text{"} \quad (1)\\ Q(x): &\quad \text{"}2\text{ går op i }x\text{"} \quad (2)\\ R(x): &\quad \text{"}x\text{ er større end }7\text{"} \quad (3) \end{aligned}$$

Afkryds sandhedsværdien af følgende 6 logiske udsagn:

a. $P(2)$

☒ Sand ☐ Falsk

b. $Q(5)$

☐ Sand ☒ Falsk

c. $P(2) \wedge R(10)$

☒ Sand ☐ Falsk

d. $(P(2) \wedge Q(5)) \vee R(12)$

☒ Sand ☐ Falsk

e. $\forall x(P(x) \vee R(x))$

☐ Sand ☒ Falsk

f. $\exists x((\neg(P(x) \vee R(x))) \wedge Q(x))$

☒ Sand ☐ Falsk

Opgave 7 (4 %).

Betragt følgende algoritme:

Procedure sum(n: positivt heltal)
$s := 0$
for $i := 1$ **to** n
  for $j := 1$ **to** n
    s:=s+1
return s

Worst-case tids-kompleksiteten af procedure sum er (sæt alene et kryds)

☐ $\mathcal{O}(n)$ ☐ $\mathcal{O}(n \log n)$ ☒ $\mathcal{O}(n^2)$ ☐ $\mathcal{O}(n^{3/2})$

Opgave 8 (6 %).

Betragt mængderne $A = \{1, 2\}$ og $B = \{2, 3, 4\}$.

a. Hvilket af følgende elementer tilhører $A \times B$? (Sæt alene et kryds)

☐ $(1, 1)$ ☒ $(2, 2)$ ☐ $(3, 3)$ ☐ $(4, 1)$

b. Hvad er kardinaliteten af $A \times B$? (Sæt alene et kryds)

☒ 6 ☐ 12 ☐ 16 ☐ 32 ☐ 64

c. Hvad er kardinaliteten af $\mathcal{P}(A \times B)$? (Sæt alene et kryds)

☐ 12 ☐ 16 ☐ 32 ☒ 64 ☐ 128

d. Ligger $\{(1, 3), (2, 2)\}$ i $\mathcal{P}(A \times B)$? (Sæt alene et kryds)

☒ JA ☐ NEJ

Opgave 9 (6 %).

Besvar følgende seks JA/NEJ spørgsmål:

a. Gælder der $\sum_{i=1}^{7} 1 = 7$?

☒ JA ☐ NEJ

b. Gælder der $\sum_{k=0}^{7} k = 8$?

☐ JA ☒ NEJ

c. Gælder der $\sum_{s=1}^{n} 1 = n + 1$?

☐ JA ☒ NEJ

d. Gælder der $\sum_{i=2}^{4} (i^2 + 1) = 30$?

☐ JA ☒ NEJ

e. Gælder der $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$?

☒ JA ☐ NEJ

f. Gælder der, at mængden $\{\frac{a}{b} \mid a, b$ er positive heltal, $a > b\}$ er tællelig?

☒ JA ☐ NEJ

Opgave 10 (6 %).

Lad $(x+y)^5 = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5$, hvor a, b, c, d, e, f er heltal.

a. Der gælder $b = e$

☒ JA ☐ NEJ

b. Der gælder at c er lig (sæt alene et kryds)

☐ 5 ☒ 10 ☐ 20 ☐ -20 ☐ 60

Lad $(2x-y)^4 = gx^4 + hx^3y + ix^2y^2 + jxy^3 + ky^4$, hvor g, h, i, j, k er heltal.

c. Der gælder at h er lig (sæt alene et kryds)

☐ -16 ☐ 16 ☐ 32 ☒ -32

d. Der gælder at j er lig (sæt alene et kryds)

☒ -8 ☐ 8 ☐ 12 ☐ -12

Opgave 11 (4 %).

a. Hvor mange punkter (vertices) er der i et træ med 12 kanter (edges)? (Sæt alene et kryds)

☐ 11 ☐ 12 ☒ 13 ☐ 24

b. Hvor mange kanter (edges) er der i et træ med 12 punkter (vertices)? (Sæt alene et kryds)

☒ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 24

c. Hvor mange kanter (edges) er der i den komplette graf K_7 med 7 punkter (vertices)? (Sæt alene et kryds)

☐ 7 ☐ 8 ☐ 20 ☒ 21 ☐ 42

Opgave 12 (9 %).

Betragt grafen $G = (V, E)$ med nabomatrix (adjacency matrix)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Hvor mange punkter (vertices) har grafen G? (Sæt alene et kryds)

☒ 6 ☐ 12 ☐ 24 ☐ 48

b. Hvor mange kanter (edges) har grafen G? (Sæt alene et kryds)

☐ 6 ☐ 8 ☒ 12 ☐ 20

c. Har grafen G en Hamiltonkreds (Hamilton circuit)?

☒ JA ☐ NEJ

d. Har grafen G en Eulerkreds (Euler circuit)?

☒ JA ☐ NEJ

Opgave 13 (8 %).

a. $(603 \cdot 6004 + 60005) \mod 6$ er lig (sæt alene et kryds)

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5

b. $(603 \cdot 6004 + 60005) \mod 10$ er lig (sæt alene et kryds)

☐ 0	☐ 2	☐ 4	☐ 6	☐ 8
☐ 1	☐ 3	☐ 5	☒ 7	☐ 9

Opgave 14 (2 %).

Hvad er den størst fælles divisor af 91 og 161?

☐ 1 ☐ 3 ☒ 7 ☐ 13

Opgave 15 (6 %).

I denne opgave betragtes følgende sæt af kongruensligninger

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

hvor vi forlanger at x skal være ikke-negativt.

a. Er $x = 31$ en løsning?

☐ JA ☒ NEJ

b. Er $x = 25$ en løsning?

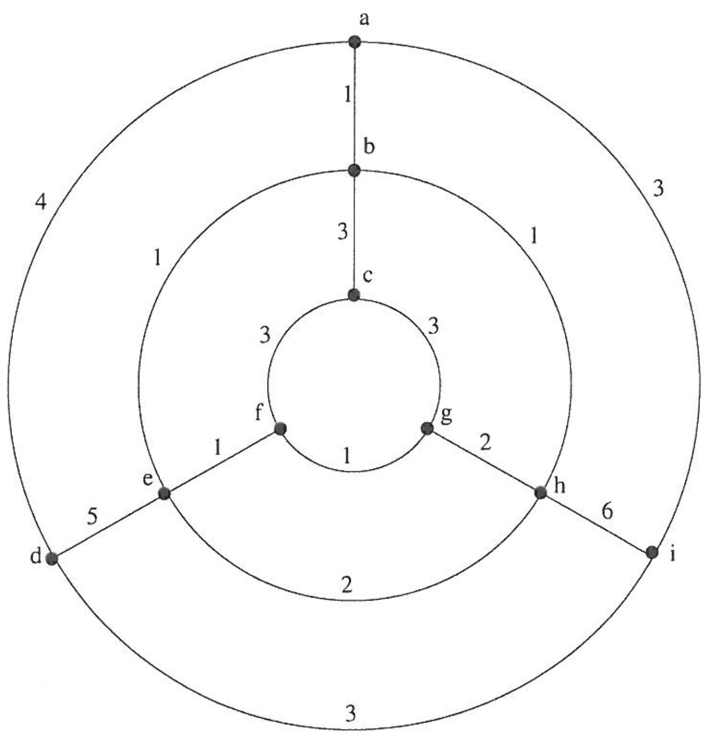
☒ JA ☐ NEJ

c. Der er præcis en løsning som er mindre end 60?

☒ JA ☐ NEJ

d. Der er præcis to løsninger som er mindre end 120?

☒ JA ☐ NEJ



Figur 1:

Opgave 16 (3 %).

Hvad er vægten af et minimum vægt udspændende træ for grafen i figur 1?

☐ 12 ☐ 13 ☒ 14 ☐ 15 ☐ 16 ☐ 17

Opgave 17 (4 %).

Antag at Dijkstras algoritme benyttes til at bestemme længden af en korteste vej fra a til g i grafen i figur 1. Hvilket af følgende punkter tilføjes da *først* til mængden S?

☐ c ☐ d ☒ e ☐ f