# Reeksamen i Diskret Matematik

**Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet**

**21. august 2015**

Nærværende eksamenssæt består af 10 nummererede sider med ialt 17 opgaver.

**Tilladte hjælpemidler:** Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

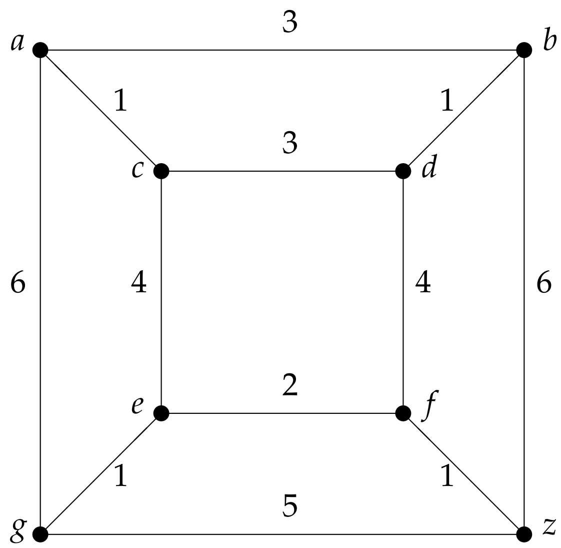
Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "essay-opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen.

NAVN: ________________________________________

STUDIENUMMMER: ________________________________________




Figur 1:

## Del I: ("Essay-opgaver")

### Opgave 1 ( 10%)

Vis ved induktion at

$$\sum_{i=0}^{n}(2 \cdot 3^{i}) = 3^{n+1} - 1$$

for alle heltal $n \geq 0$.

### Opgave 2 ( 12%)

Bestem ved hjælp af Dijkstras algoritme længden af en korteste vej fra $a$ til $z$ i grafen vist i figur 1.
Opskriv grafens punkter i rækkefølge bestemt ved voksende afstand fra $a$.

## Del II: ("Multiple choice" opgaver)

*Der er kun ét rigtigt svar til hvert spørgsmål.*

**Opgave 3** ( 3%)

Hvad er vægten af et minimum vægt udspændende træ i grafen vist i figur 1?

☐ 7 ☐ 9 ☐ 11 ☐ 13 ☐ 15 ☐ 17

**Opgave 4** ( 6%)

Lad $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 1, 5\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4\}$ være mængder.

1. Hvad er kardinaliteten af $A \cap B$ ?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

2. Hvad er kardinaliteten af $A \cup B$ ?

   ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

3. Hvad er kardinaliteten af $A \times B$ ?

   ☐ 12 ☐ 15 ☐ 16 ☐ 20 ☐ 25 ☐ 30

4. Hvilket af følgende er et element i $A \times B$?

   ☐ $\{\emptyset, 3\}$ ☐ $\{5, 2\}$ ☐ $(5, 2)$ ☐ $(2, 5)$

**Opgave 5** ( 5%)

Hvad er den inverse til 7 modulo 31?

☐ 1 ☐ 9 ☐ 11 ☐ 22 ☐ 23 ☐ 24

**Opgave 6** ( 6%)

Betragt følgende påstand om Fibonacci tallene $f_0, f_1, f_2, \ldots$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1}$$

Påstanden kan bevises ved stærk induktion. I basisskridtet vises først at ligning (1) er sand for $n = 0$ og for $n = 1$.

Hvilken af følgende formuleringer er en korrekt start på induktionsskridtet (inklusiv induktionsantagelse):
(Efter denne formulering beviser man ligning (1) for $n = k + 1$.)

☐ Lad $k \geq 1$ og antag at ligning (1) er sand for $n = k$.
☐ Lad $k \geq 2$ og antag at ligning (1) er sand for $n = k$.
☐ Lad $k \geq 1$ og antag at ligning (1) er sand for alle $n$ hvor $0 \leq n \leq k$.
☐ Lad $k \geq 2$ og antag at ligning (1) er sand for alle $n$ hvor $0 \leq n \leq k$.
☐ Lad $k \geq 1$ og antag at ligning (1) er sand for alle $n$ hvor $2 \leq n \leq k$.
☐ Lad $k \geq 2$ og antag at ligning (1) er sand for alle $n$ hvor $2 \leq n \leq k$.

**Opgave 7** ( 4%)

Hvilket af følgende udsagn er ækvivalent med udsagnet $\neg\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y))$?

☐ $\forall x \exists y (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y))$
☐ $\exists y \forall x (P(x,y) \wedge Q(x,y))$
☐ $\exists x \forall y (\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x,y))$
☐ $\exists x \forall y (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y))$

## Opgave 8 ( 8%)

Betragt følgende algoritme:

**procedure** *matrix-expression*($A = [a_{ij}]$: $n \times n$ matrix)
$s := 0$
**for** $i := 1$ **to** $n$
  **for** $j := 1$ **to** $n$
    $t := 1$
    **for** $k := 1$ **to** 3
      $t := a_{ij} \cdot t + 1$
    $s := s + t$
**return** $s$

Besvar følgende to spørgsmål om denne algoritme:

1. Antallet af multiplikationer der bruges af *matrix-expression* er

   ☐ $\Theta(n)$ ☐ $O(n^2)$ ☐ $\Theta(n^2 \log n)$ ☐ $\Omega(n^3)$

2. Hvilket af følgende udtryk beregnes af *matrix-expression*?

   ☐ $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{ij})^k$

   ☐ $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{3} (a_{ij})^k$

   ☐ $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{3} (a_{ij})^k$

   ☐ $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{2} (a_{ij})^k$

## Opgave 9 ( 3%)

Hvilken slutningsregel (rule of inference) benyttes i følgende argument:

"Hvis vi har diskret matematik-eksamen så er det fredag. Hvis det er fredag så er det snart weekend. Derfor, hvis vi har diskret matematik-eksamen så er det snart weekend."

☐ Konjunktion
☐ Modus tollens
☐ Modus ponens
☐ Kædeslutningsregel (hypothetical syllogism)

## **Opgave 10** ( 6%)

En mængde $S$ af heltal er defineret rekursivt ved

- $5 \in S$ og $7 \in S$
- hvis $a \in S$ og $b \in S$ så er $a + b$ også i $S$.

Besvar følgende spørgsmål om $S$.

1. Hvad det største heltal, der *ikke* ligger i $S$ ?

   ☐ 18 ☐ 19 ☐ 23 ☐ 24 ☐ 29

2. $S$ består af alle tal på formen $5r + 7t$ hvor $r$ og $t$ er hele tal der opfylder ...
   Angiv den korrekte fortsættelse.

   ☐ $r \geq 0 \wedge t \geq 0$
   ☐ $r \geq 1 \wedge t \geq 1$
   ☐ $r \geq 1 \vee t \geq 1$
   ☐ $r \geq 0 \wedge t \geq 0 \wedge r + t > 0$
   ☐ $(r + 1)(t + 1) \geq 2$

## **Opgave 11** ( 4%)

Betragt følgende mængde af heltal

$$S = \{x \mid 0 \leq x < 100 \ \wedge \ x \equiv 3 \pmod 4 \ \wedge \ x \equiv 2 \pmod 5\}.$$

Hvor mange heltal er der i $S$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 5 ☐ 10 ☐ 100

**Opgave 12** ( 7%)

Lad $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ være en mængde. Betragt følgende to relationer på $A$

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,4),(5,1),(5,5)\}$$

$$S = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\}.$$

1. Afkryds sandhedsværdien af følgende 6 logiske udsagn:

   a. $R$ er transitiv

   ☐ Sand ☐ Falsk

   b. $R$ er refleksiv

   ☐ Sand ☐ Falsk

   c. $R$ er symmetrisk

   ☐ Sand ☐ Falsk

   d. $S$ er antisymmetrisk

   ☐ Sand ☐ Falsk

   e. $(5, 2)$ er i den sammensatte relation $R \circ S$

   ☐ Sand ☐ Falsk

   f. $(5, 2)$ er i den sammensatte relation $S \circ R$

   ☐ Sand ☐ Falsk

2. Lad $S^*$ betegne den transitive afslutning af $S$. Hvor mange par $(a, b)$ er der i $S^*$ ?

   ☐ 5 ☐ 10 ☐ 15 ☐ 20 ☐ 25

**Opgave 13** ( 5%)

a. Hvor mange rækker er der i en sandhedstabel for det sammensatte udsagn

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$$

☐ 1 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 16

b. $(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$ er en tautologi.

☐ Sand ☐ Falsk

c. De to udsagn $(p \wedge q) \vee (q \wedge \neg p)$ og $(p \vee \neg p) \wedge q$ er ækvivalente.

☐ Sand ☐ Falsk

**Opgave 14** ( 4%)

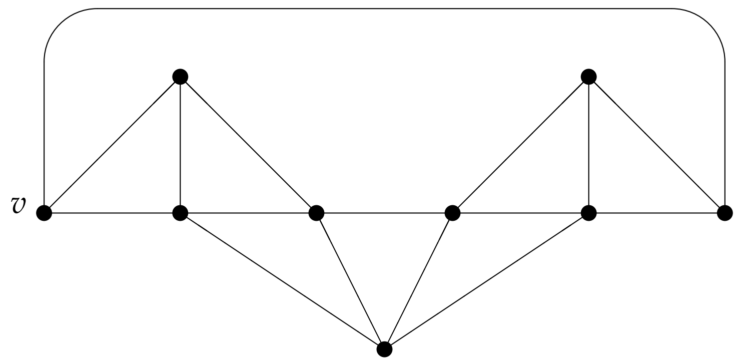
Betragt grafen $G$ i figur 2.

a. Hvad er graden af punktet (vertex) $v$

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

b. Hvad er antallet af kanter i et udspændende træ i $G$

☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 14 ☐ 17




Figur 2: Grafen $G$ der betragtes i opgaverne 14 og 15.

**Exercise 15** ( 6%)

Betragt igen grafen $G$ i figur 2.
Afkryds sandhedsværdien af følgende udsagn.

a. $G$ er en simpel graf.

☐ Sand ☐ Falsk

b. $G$ er sammenhængende (connected).

☐ Sand ☐ Falsk

c. $G$ har en Euler kreds.

☐ Sand ☐ Falsk

d. $G$ har en Hamilton kreds.

☐ Sand ☐ Falsk

e. $G$ har en Hamilton vej (Hamilton path).

☐ Sand ☐ Falsk

## Opgave 16 ( 6%)

Lad $f(x) = 5x^2 + 4x + 3$. Vi kan se at $f(x)$ er $O(x^2)$.

a. $(C, k) = (12, 0)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^2)$.

☐ Sand ☐ Falsk

b. $(C, k) = (10, 1)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^2)$.

☐ Sand ☐ Falsk

c. $(C, k) = (12, 1)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^2)$.

☐ Sand ☐ Falsk

d. $(C, k) = (29, 1)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^2)$.

☐ Sand ☐ Falsk

e. $(C, k) = (7, 2)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^2)$.

☐ Sand ☐ Falsk

f. $(C, k) = (9, 2)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^2)$.

☐ Sand ☐ Falsk

## Opgave 17 ( 5%)

Antag vi skal sortere 1000 tal i voksende rækkefølge. Vi kan bruge algoritmen *Bubble Sort* eller algoritmen *Merge Sort*. Hviken af følgende påstande er korrekt.

☐ *Merge Sort* bruger flere sammenligninger end *Bubble Sort*.
☐ De to algoritmer bruger cirka samme antal sammenligninger.
☐ *Bubble Sort* bruger cirka 3 gange så mange sammenligninger som *Merge Sort*.
☐ *Bubble Sort* bruger cirka 50 gange så mange sammenligninger som *Merge Sort*.