Eksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

19. august 2014, 9.00–13.00

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen.

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (6%).

Hvad bliver resultatet (ifølge binomialsætningen), hvis alle parenteser ganges ud i udtrykket $(a+1)^7$.

Opgave 2 (9%).

Lad $A = \{a, b, c, d, e\}$ og lad $R = \{(a, b), (b, c), (c, a), (c, d), (c, e), (d, e)\}$ være en relation på A.

1. Tegn den orienterede graf, der repræsenterer R.
2. Bestem en matrix $\mathbf{M}_R$, der repræsenterer R.
3. Bestem den transitive afslutning R^* af R.

Opgave 3 (7%).

Udregn

$$(703 \cdot 7004 + 70005) \mod 7.$$

Opgave 4 (9%).

Bevis ved induktion at

$$\sum_{i=1}^{n} (6i - 4) = 3n^2 - n,$$

for ethvert positivt helt tal n.

Opgave 5 (7%).

Bestem ved hjælp af Euklids algoritme den største fælles divisor af 161 og 91, og find hele tal s og t, som opfylder at $\gcd(161, 91) = s \cdot 161 + t \cdot 91$.

Opgave 6 (8%).

Find vidner, der viser at $f(x) = 3x^2 + 10x + 2$ er $O(x^2)$.

Opgave 7 (12%).

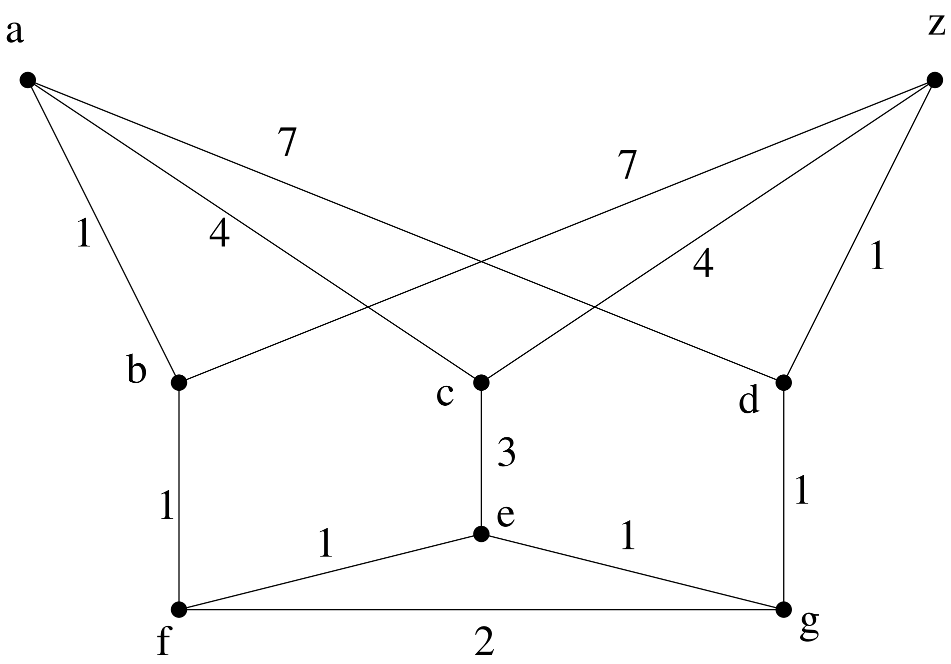
Betragt følgende algoritme:

> **Procedure** exam(n: positivt heltal)
> $x := 4$
> $y := 12$
> $i := 1$
> **while** $i < n$
> $h := 4(y - x)$
> $x := y$
> $y := h$
> $i := i + 1$
> **return** y

1. Vis at følgende udsagn er en invariant for while-løkken:

$$i \in \mathbb{N} \ \wedge \ i \leq n \ \wedge \ x = (i+1) \cdot 2^i \ \wedge \ y = (2i+4) \cdot 2^i.$$

2. Hvad er værdien af y når algoritmen standser? Begrund dit svar.



Figur 1: En graf G der betragtes i opgave 8 og opgave 10.

Opgave 8 (12%).

Bestem ved hjælp af Dijkstras algoritme længden af en korteste vej fra **a** til **z** i grafen vist i figur 1.

Del II (”multiple choice” opgaver)

Opgave 9 (4%).

Betragt følgende algoritme:

Procedure sum(n: positivt heltal)
$s := 0$
for $i := 1$ **to** n
  for $j := 1$ **to** n
    $s := s + 1$
return s

Worst-case tids kompleksiteten af procedure sum er:

☐ $O(n)$ ☐ $O(n \log n)$ ☐ $O(n^2)$ ☐ $O(n^3)$

Opgave 10 (4%).

Betragt igen grafen G i figur 1. (I denne opgave ses bort fra kantvægtene.) Besvar de følgende to sand/falsk opgaver:

1. G har en Hamiltonkreds (Hamilton circuit).

   ☐ Sand ☐ Falsk

2. G har en Eulerkreds (Euler circuit).

   ☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 11 (6%).

Lad T være et fuldt binært træ med 7 blade.

1. Hvor mange punkter (vertices) har T i alt?

   ☐ 6 ☐ 7 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15

2. Hvad er den mindst mulige højde af T?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

3. Hvad er den størst mulige højde af T?

   ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

Opgave 12 (6%).

Lad $A = \{1, 2\}$ og $B = \{2, 3, 4\}$ være mængder.

1. Hvad er kardinaliteten af $\mathcal{P}(A \times B)$?

   ☐ 12 ☐ 16 ☐ 32 ☐ 64 ☐ 128

2. Hvilke af følgende er elementer i $\mathcal{P}(A \times B)$?

   ☐ $(1, 3)$ ☐ $\{1, 4\}$ ☐ $\emptyset$ ☐ $\{(1, 3), (2, 2)\}$

Opgave 13 (10%).

Lad $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + x \log x + x^2 + 2$, for $x > 0$.
Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

1. $f(x)$ er $O(x^5)$.

   ☐ Sand ☐ Falsk

2. $f(x)$ er $O(x^4)$.

   ☐ Sand ☐ Falsk

3. $f(x)$ er $O(x^3)$.

   ☐ Sand ☐ Falsk

4. $f(x)$ er $O(x^4 \log x)$.

   ☐ Sand ☐ Falsk

5. $f(x)$ er $O(x^3 \log x)$.

   ☐ Sand ☐ Falsk