Reeksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

Torsdag den 9. august, 2012. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 9 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLD:
☐ Matematik, Matematikøkonomi, Fysik.
☐ Datalogi, Software

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (6 %).

Hvad bliver resultatet (ifølge binomialsætningen) hvis alle paranteser ganges ud i udtrykket $(x-2y)^4$?

Opgave 2 (6 %).

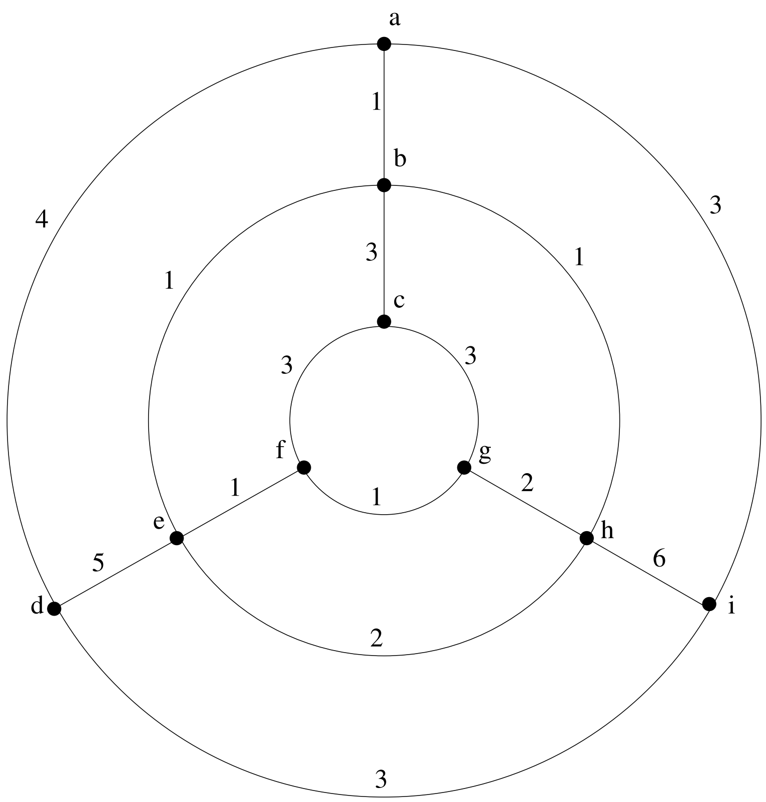
Lad $S = \{\emptyset, 4, a\}$. Bestem potensmængden (the power set) $P(S)$.

Opgave 3 (6 %).

Bestem antallet af punkter (vertices) i et fuldt binært træ med 10 blade. Findes der et sådant træ med højde 3? Findes der et med højde 4?

Opgave 4 (6 %).

Bestem ved hjælp af Euklids algoritme den største fælles divisor af 7 og 100. Find hele tal s og t så $\gcd(7, 100) = 7s + 100t$.



Figur 1:

Opgave 5 (8 %).

Bestem ved hjælp af Kruskals algoritme et minimum vægt udspændende træ for grafen i figur 1. Angiv den rækkefølge hvori kanterne tilføjes til træet.

Opgave 6 (12 %).

Lad S være defineret rekursivt på følgende måde:

Basistrin (Basis step): $4 \in S$ *og* $6 \in S$.

Rekursionstrin: Hvis $a \in S$ *og* $b \in S$ *da gælder der, at* $a + b \in S$

Giv et strukturelt induktionsbevis for at alle tal i S er lige.

Nedenfor finder du opgave 7A og opgave 7B. Du må alene besvare en af disse. Afleverer du alligevel besvarelser af begge, da indgår en tilfældig af dem i bedømmelsen.

Opgave 7A (8 %).

I denne opgave arbejdes der med kvadratiske $n \times n$ matricer

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

og vektorer af formen

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

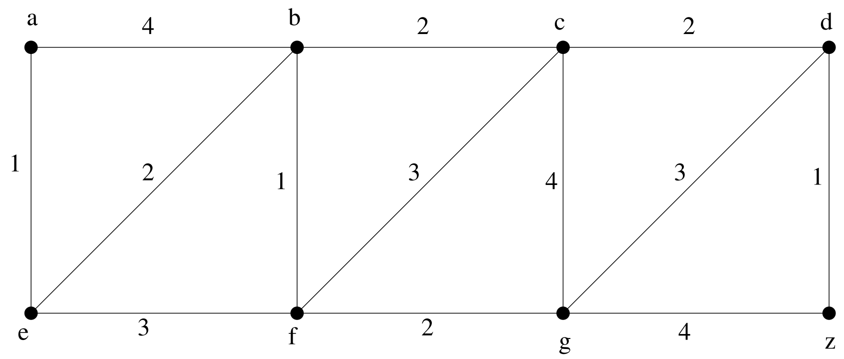
Betragt algoritmen:

Procedure mvp(A: $n \times n$ matrix, $\vec{b}$: søjlevektor med n elementer)
for $i := 1$ to n
begin
  $c_i := 0$
  for $j := 1$ to n
    $c_i := c_i + a_{i\,j} b_j$
  end
end
$\{[c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$ er lig $A\vec{b}\}$

Giv store-$\mathcal{O}$ vurdering af antallet af operationer i algoritmen ovenfor. Husk at argumentere for dit svar.

Opgave 7B (8 %).

Vis ved hjælp af vidner C og k, at $x^2 + 7x + 2$ er $\mathcal{O}(x^2)$.



Figur 2:

Nedenfor finder du opgave 8A og opgave 8B. Du må alene besvare en af disse. Afleverer du alligevel besvarelser af begge, da indgår en tilfældig af dem i bedømmelsen.

Opgave 8A (12 %).

Bestem ved hjælp af Dijkstras algoritme længden af en korteste vej fra a til z i grafen vist i figur 2. Opskriv grafens punkter i rækkefølge bestemt ved voksende afstand fra a.

Opgave 8B (12 %).

Løs ved hjælp af den kinesiske restsætning (the Chineese Remainder Theorem) systemet:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

Opgave 9 (12 %).

Betragt følgende algoritme:

Procedure tal(n: positivt heltal)
$x := 0$
$i := 0$
while $i < n$
begin
  $x := x + 2i - 1$
  $i := i + 1$
end

1. Vis at følgende udsagn er en invariant for while-løkken:

$$i \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad i \leq n \quad \wedge \quad x = i(i-2).$$

2. Hvad er værdien af x når algoritmen standser?

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 10 (8 %).

I denne opgave tilhører x mængden af heltal. Det vil sige definitionsmængden er lig $\mathbb{Z}$. Betragt følgende udsagnsfunktioner på $\mathbb{Z}$:

$$P(x): \quad "x \text{ er mindre end } 5" \tag{1}$$
$$Q(x): \quad "2 \text{ går op i } x" \tag{2}$$
$$R(x): \quad "x \text{ er større end } 7" \tag{3}$$

Afkryds sandhedsværdien af følgende 4 logiske udsagn:

a. $\neg\exists x(P(x) \wedge R(x))$

☐ Sand ☐ Falsk

b. $\forall x(P(x) \vee R(x))$

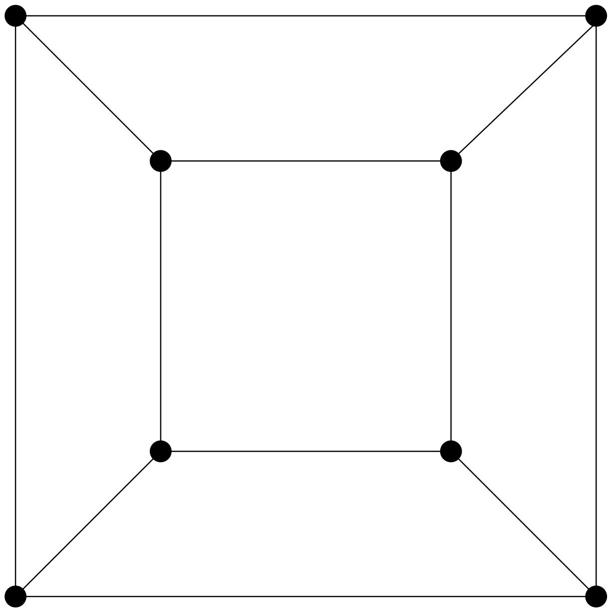
☐ Sand ☐ Falsk

c. $\exists x\neg(P(x) \vee R(x))$

☐ Sand ☐ Falsk

d. $\exists x((\neg(P(x) \vee R(x))) \wedge Q(x))$

☐ Sand ☐ Falsk



Figur 3:

Opgave 11 (7 %).

Betragt grafen i figur 3. Besvar følgende JA/NEJ spørgsmål:

a. Er grafen to-delt (bipartite)?

☐ JA ☐ NEJ

b. Har grafen en Hamiltonkreds (Hamilton circuit)?

☐ JA ☐ NEJ

c. Har grafen en Eulerkreds (Euler circuit)?

☐ JA ☐ NEJ

Opgave 12 (9 %).

En relation R på mængden $\{a, b, c, d\}$ er givet ved matricen

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvilke af følgende egenskaber har relationen R? (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning)

☐ Refleksiv ☐ Symmetrisk ☐ Antisymmetrisk ☐ Transitiv