Eksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

10. juni, 2016. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 11 nummererede sider med ialt 16 opgaver. Alle opgaver er "multiple choice" opgaver. **Besvarelsen skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på besvarelsen.

NAVN: ____________________________________

STUDIENUMMMER: ____________________________________

Der er kun ét rigtigt svar til hvert spørgsmål.

Opgave 1 (8 %)

Betragt følgende lineære homogene rekursionsrelation

$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}.$$

1. Hvad er graden (degree) af denne rekursionsrelation?

   ☐ -1 ☐ 0 ☐ 2 ☐ 6

2. Hvilken af følgende er løsningen til denne rekursionsrelation (α_1 og α_2 er konstanter)?

   ☐ $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 \cdot 3^n$
   ☐ $a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 \cdot 6^n$
   ☐ $a_n = \alpha_1 + \alpha_2(-6)^n$
   ☐ $a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2(-3)^n$

Opgave 2 (5 %)

Betragt følgende algoritme:

procedure *multiplications*(n: positive integer)
$t := 1$
for $i := 1$ **to** n
  for $j := 1$ **to** i
    $t := 2 \cdot t$
return t

Antallet af multiplikationer, der bruges af denne algoritme, er

☐ $O(n)$ ☐ $\Theta(n)$ ☐ $O(n\sqrt{n})$ ☐ $O(n^2)$ ☐ $\Omega(n^3)$

Opgave 3 (5 %)

Hvilket af følgende tal er en invers til 43 modulo 100?

☐ -3 ☐ 7 ☐ 17 ☐ 27

Opgave 4 (9 %)

Betragt følgende algoritme:

procedure *additions*(n: positive integer)
$i := 0$
$x := n$
$s := 0$
while $i < n$
  $i := i + 1$
  $s := s + i + x$
  $x := x - 1$
return s

1. Hvilket af følgende udsagn er en løkke-invariant for while-løkken i denne algoritme?

   ☐ $i \leq n \ \wedge \ s = in \ \wedge \ x - i = n$
   ☐ $i \leq n - 1 \ \wedge \ s = i(n-1) \ \wedge \ i + x = n$
   ☐ $i \leq n \ \wedge \ s = i(n+1) \ \wedge \ i + x = n$
   ☐ $i \leq n - 1 \ \wedge \ s = i(n+1) \ \wedge \ x - i = n$
   ☐ $i \leq n \ \wedge \ s = in \ \wedge \ i + x = n$

2. Hvilken værdi af s returnes af procedure *additions*?

   ☐ n^2 ☐ $(n+1)^2$ ☐ $n(n+1)$ ☐ $n^2 - n$

Opgave 5 (6 %)

Hvad er værdien af $(79 + 778 + 7777 \cdot 321) \mod 7$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Opgave 6 (8 %)

Lad $P(n)$ være følgende udsagn om den numeriske værdi af reelle tal

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \text{ for alle reelle tal } x_1, \ldots, x_n.$$

Fra en opgave i Rosens bog ved vi at $P(2)$ er sand.
Vi vil bevise ved induktion at $P(n)$ er sand for alle $n \geq 2$.

Hvilket af følgende er en korrekt skitse af induktionsskridtet?

☐ Lad $k \geq 1$ og antag at $P(k)$ er sand. Vis derefter ved hjælp af

$$|x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_{k+1}| \leq |x_1 + x_2| + |x_3 + \ldots + x_{k+1}|$$

og induktionsantagelsen at $P(k+1)$ er sand.

☐ Lad $k \geq 2$ og antag at $P(k)$ er sand. Vis derefter ved hjælp af

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k| \leq |x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}| + |x_k|$$

og induktionsantagelsen at $P(k+1)$ er sand.

☐ Lad $k \geq 2$ og antag at $P(k)$ er sand. Vis derefter ved hjælp af

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1 + x_2 + \ldots + x_k| + |x_{k+1}|$$

og induktionsantagelsen at $P(k+1)$ er sand.

☐ Lad $k \geq 3$ og antag at $P(k)$ er sand. Vis derefter ved hjælp af

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2 + \ldots + x_{k+1}|$$

og induktionsantagelsen at $P(k+1)$ er sand.

☐ Lad $k \geq 2$ og antag at $P(k-1)$ er sand. Vis derefter ved hjælp af

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1 + x_2 + \ldots + x_k| + |x_{k+1}|$$

og induktionsantagelsen at $P(k)$ er sand.

Opgave 7 (9 %)

Betragt de følgende to relationer på mængden $A = \{1,2,3,4,5\}$:

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,5)\}$$

$$S = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(5,3)\}.$$

1. Besvar følgende sand/falsk opgaver:

R er refleksiv	☐ Sand	☐ Falsk
R er antisymmetrisk	☐ Sand	☐ Falsk
S er symmetrisk	☐ Sand	☐ Falsk
S er transitiv	☐ Sand	☐ Falsk

2. Hvilken af følgende værdier af x opfylder at $(5,x)$ er i den sammensatte relation $R \circ S$?

   ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

3. Hvilken af følgende værdier af x opfylder at $(5,x)$ er i den sammensatte relation $S \circ R$?

   ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

4. Lad R^* være den transitive afslutning af S. Hvor mange par (a,b) er der i R^* ?

   ☐ 6 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 12 ☐ 20 ☐ 25

Opgave 8 (7 %)

En graf G med punkter $v_1, v_2, \ldots, v_7$ har nabomatrix (adjacency matrix):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Besvar følgende sand/falsk opgaver.

G har en Eulerkreds (Euler circuit)	☐ Sand	☐ Falsk
G har en Hamiltonkreds (Hamilton circuit)	☐ Sand	☐ Falsk
G har en Hamiltonvej (Hamilton path)	☐ Sand	☐ Falsk

2. Hvad er længden af en korteste simpel kreds i G?

   ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

3. Hvad er antallet af kanter i et udspændende træer af G ?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Opgave 9 (4 %)

Hvilket af følgende udsagn er ækvivalent med $\forall x(P(x) \wedge \neg Q(x))$?

☐ $\neg\forall x(P(x) \vee Q(x))$
☐ $\neg\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$
☐ $\neg\forall x(\neg P(x) \wedge Q(x))$
☐ $\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))$

Opgave 10 (4 %)

Besvar følgende opgaver om antallet af permutationer og kombinationer.

$\forall n \forall r(P(n,r) = P(n,n-r))$	☐ Sand	☐ Falsk
$\forall n \forall r(C(n,r) = C(n,n-r))$	☐ Sand	☐ Falsk
$\forall n \forall r(P(n,r) = C(n,r) \cdot r!)$	☐ Sand	☐ Falsk
$\forall n \forall r(C(n+1,r+1) = C(n,r))$	☐ Sand	☐ Falsk

Opgave 11 (4 %)

Betragt følgende udsagn:

Udsagn 1: Hvis det er søndag så er der solskin.

Udsagn 2: Hvis det ikke er søndag så er der ikke solskin.

Udsagn 3: Hvis der er solskin så er det søndag.

Udsagn 4: Hvis der ikke er solskin så er det ikke søndag.

Hvad er det kontrapositive af Udsagn 1?

☐ Udsagn 1 ☐ Udsagn 2 ☐ Udsagn 3 ☐ Udsagn 4

Opgave 12 (6 %)

Lad $A = \{\emptyset, 2, \{1, 2\}\}$ og $B = \{a, \{\emptyset\}, 1, 2, 3\}$ være mængder.

1. Hvad er kardinaliteten af $A \cap B$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

2. Hvad er kardinaliteten af $A \cup B$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

3. Hvilket af følgende er et element i $A \times B$?

   ☐ $(2, 1)$ ☐ $(1, 2)$ ☐ $\{1, 2\}$ ☐ $(\emptyset, \emptyset)$

4. Hvilket af følgende er et element i potensmængden $\mathcal{P}(A)$?

   ☐ $\{\{\emptyset\}\}$ ☐ $\{1, 2\}$ ☐ $\{\{1, 2\}\}$ ☐ $\{\emptyset, 1\}$

Opgave 13 (4 %)

1. Hvad er værdien af $P(6, 3)$?

   ☐ 6
   ☐ 30
   ☐ 120
   ☐ 720

2. Hvad er værdien af $C(7, 3)$?

   ☐ 15
   ☐ 20
   ☐ 35
   ☐ 210

Opgave 14 (6 %)

Lad $f(x) = (2x+3)(x^3 - 5x + 1)$.
Besvar følgende sand/falsk opgaver.

1. $f(x)$ er $O(x^3)$ ☐ Sand ☐ Falsk
2. $f(x)$ er $O(x^4)$ ☐ Sand ☐ Falsk
3. $f(x)$ er $O(x^5)$ ☐ Sand ☐ Falsk
4. $f(x)$ er $\Omega(x^3)$ ☐ Sand ☐ Falsk
5. $f(x)$ er $\Omega(x^4)$ ☐ Sand ☐ Falsk
6. $f(x)$ er $\Omega(x^5)$ ☐ Sand ☐ Falsk
7. $f(x)$ er $\Theta(x^3)$ ☐ Sand ☐ Falsk
8. $f(x)$ er $\Theta(x^4)$ ☐ Sand ☐ Falsk
9. $f(x)$ er $\Theta(x^5)$ ☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 15 (10 %)

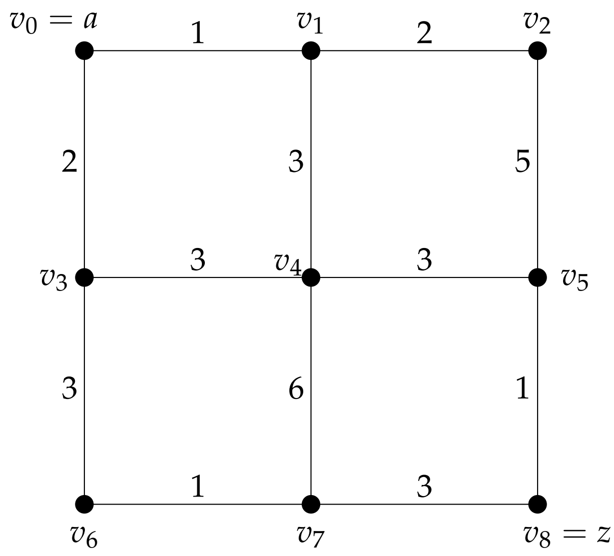
I denne opgave bruger vi Dijkstras algoritme (se Figur 2) på grafen i Figur 1.

1. Hvad er længden af den korteste vej fra a til z (bestemmes af Dijkstras algoritme)?

   ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 14

2. I hvilken rækkefølge tilføjes punkter til mængden S ?

   ☐ a, v_1, v_2, v_5, v_8
   ☐ a, v_1, v_4, v_5, v_8
   ☐ $a, v_1, v_3, v_2, v_4, v_6, v_7, v_5, v_8$
   ☐ $a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$



Figur 1: Grafen G, der betragtes i opgaverne 15 og 16.

Opgave 16 (5 %)

Hvad er vægten af et minimum vægt udspændende træ af grafen i Figur 1.

☐ 9 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15 ☐ 16 ☐ 18

procedure *Dijkstra*(G: weighted connected simple graph, with
all weights positive)
$\{G$ has vertices $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ and lengths $w(v_i, v_j)$
where $w(v_i, v_j) = \infty$ if $\{v_i, v_j\}$ is not an edge in $G\}$
for $i := 1$ **to** n
$L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all
other labels are ∞, and S is the empty set}
while $z \notin S$
$u :=$ a vertex not in S with $L(u)$ minimal
$S := S \cup \{u\}$
for all vertices v not in S
if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u, v)$
{this adds a vertex to S with minimal label and updates the
labels of vertices not in S}
return $L(z)$ $\{L(z) =$ length of a shortest path from a to $z\}$

Figur 2: