

Eksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

15. juni, 2015. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 12 nummererede sider med ialt 17 opgaver.

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "essay-opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.**

NAVN:

STUDIENUMMER:

Del I: ("Essay-opgaver")

Opgave 1 (8%)

En følge $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ af hele tal er defineret rekursivt ved

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_{n+1} &= 2a_n - n, \text{ for alle } n \geq 0. \end{aligned}$$

Bevis ved induktion at $a_n = n + 1$ for alle $n \geq 0$.

Opgave 2 (9%)

Betragt følgende algoritme.

```
procedure sum(n: positivt heltal)
  i := 1
  x := 1
  s := 1
  while i < n
    i := i + 1
    x := x + 2
    s := s + x
  return s
```

1. Vis at følgende påstand er en invariant (loop invariant) for while-løkken:

$$i \in \mathbb{N} \wedge i \leq n \wedge x = 2i - 1 \wedge s = i^2. \quad (1)$$

2. Hvad er værdien af s udtrykt ved n når algoritmen standser? Begrund dit svar.

Del II: ("Multiple choice" opgaver)

Der er kun ét rigtigt svar til hvert spørgsmål.

Opgave 3 (3%)

Ved brug af Euklids udvidede algoritme finder man at

$$\gcd(258, 369) = -10 \cdot 258 + 7 \cdot 369 = 3.$$

Hvilken af følgende påstande er sand?

- -10 er invers til 258 modulo 369.
- 359 er invers til 258 modulo 369.
- 7 er invers til 258 modulo 369.
- 258 har ikke nogen invers modulo 369.

Opgave 4 (4%)

Hvilken af følgende mængder er *ikke* tællelig (countable)?

- Mængden af primtal
- $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid -3 \leq x \leq \sqrt{2}\}$

Opgave 5 (4%)

Hvilket af følgende udsagn er ækvivalent med udsagnet $\forall x \exists y P(x, y)$?

- $\forall y \exists x P(x, y)$ $\exists x \forall y P(x, y)$ $\forall y \exists x P(y, x)$ $\exists y \forall x P(x, y)$

Opgave 6 (8%)

Betragt flette-sorterings algoritmen (Merge Sort) på side 360 i [Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, Seventh Edition, Global Edition], der anvender procedure *merge* på side 361.

Lad $P(x, y)$ betegne påstanden: "Hvis vi bruger Merge Sort og procedure *merge* til at sortere listen

5, 2, 7, 3, 6, 1, 9, 4

så vil vi på et tidspunkt foretage en direkte sammenligning mellem x og y ."

Afkryds sandhedsværdien af følgende 4 logiske udsagn:

a. $P(3, 6)$

Sand

Falsk

b. $P(3, 4)$

Sand

Falsk

c. $P(2, 7)$

Sand

Falsk

d. $P(1, 4)$

Sand

Falsk

Opgave 7 (5%)

a. De to udsagn $r \rightarrow s$ og $\neg r \vee s$ er ækvivalente.

Sand

Falsk

b. Hvor mange rækker er der i en sandhedstabel for det sammensatte udsagn

$$p \vee \neg q \leftrightarrow \neg p \vee q$$

1

2

3

4

6

8

c. I hvor mange rækker af denne sandhedstabel har udsagnet

$$p \vee \neg q \leftrightarrow \neg p \vee q$$

sandhedsværdien "sand (T)" ?

0

1

2

3

4

5

d. $p \vee \neg q \leftrightarrow \neg p \vee q$ er en tautologi.

Sand

Falsk

Opgave 8 (3%)

Hvilken slutningsregel (rule of inference) benyttes i følgende argument:

"Hvis det er Valdemarsdag så er der flag på busserne. Det er Valdemarsdag. Derfor er der flag på busserne."

Konjunktion

Modus tollens

Modus ponens

Universel generalisering

Opgave 9 (4%)

Betragt følgende mængde af heltal

$$S = \{x \mid 0 \leq x < 280 \wedge x \equiv 3 \pmod{7} \wedge x \equiv 4 \pmod{8}\}.$$

Hvor mange heltal er der i S ?

- 0 1 2 5 10 280

Opgave 10 (5%)

Lad $(x - y)^5 = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5$, hvor a, b, c, d, e, f er heltal.

a. Der gælder $b = e$

JA

NEJ

b. Der gælder at d er lig

5

10

20

-5

-10

-20

Lad $(3x + 2y)^3 = gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3$, hvor g, h, i, j er heltal.

c. Der gælder at h er lig

6

18

27

36

54

81

Opgave 11 (7%)

Lad $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ være en mængde. Betragt følgende to relationer på A

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$R = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1)\}$$

Afkryds sandhedsværdien af følgende 6 logiske udsagn:

a. R er transitiv

Sand

Falsk

b. R er reflektiv

Sand

Falsk

c. S er en ækvivalens relation

Sand

Falsk

d. $(1, 3)$ er i den transitive afslutning af S

Sand

Falsk

e. $(2, 5)$ er i den transitive afslutning af S

Sand

Falsk

f. $(3, 5)$ er i den sammensatte relation $R \circ S$

Sand

Falsk

g. $(3, 5)$ er i den sammensatte relation $S \circ R$

Sand

Falsk

Opgave 12 (7%)

$(111 \cdot 11113 + 1111115) \bmod 11$ er lig med

- | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 |
| <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 10 | |

Opgave 13 (9%)

Lad $f(x) = (x \log x + 5x)(x^2 + 3x - 4)$, for $x > 0$.
Afkryds sandhedsværdien af følgende 6 udsagn:

a. $f(x)$ er $O(x^3)$

Sand

Falsk

b. $f(x)$ er $O(x^4)$

Sand

Falsk

c. $f(x)$ er $O(x^3 \log x)$

Sand

Falsk

d. $f(x)$ er $\Theta(x^3 \log x)$

Sand

Falsk

e. $f(x)$ er $\Omega(x^3)$

Sand

Falsk

f. $f(x)$ er $O(x^2 \log x)$

Sand

Falsk

Opgave 14 (6%)

Lad $f(x) = 3x^3 + 2x + 4$. Vi kan se at $f(x)$ er $O(x^3)$.

a. $(C, k) = (10, 0)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^3)$.

Sand

Falsk

b. $(C, k) = (6, 1)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^3)$.

Sand

Falsk

c. $(C, k) = (9, 1)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^3)$.

Sand

Falsk

d. $(C, k) = (12, 1)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^3)$.

Sand

Falsk

e. $(C, k) = (3, 2)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^3)$.

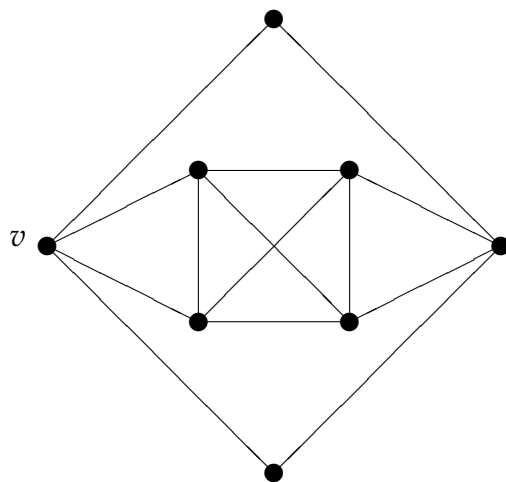
Sand

Falsk

f. $(C, k) = (5, 2)$ kan benyttes som vidner for at $f(x)$ er $O(x^3)$.

Sand

Falsk



Figur 1: Grafen G , der undersøges i opgaverne 16 og 17.

Opgave 15 (6%)

Lad $A = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{\{\emptyset\}, 2, 4, 6\}$ være mængder.

1. Hvad er kardinaliteten af $A \cap B$?

- 2 3 4 5 6 7 8

2. Hvad er kardinaliteten af $A \cup B$?

- 2 3 4 5 6 7 8

3. Hvad er kardinaliteten af $A \times B$?

- 12 15 16 20 25 30

4. Hvilket af følgende er et element i $A \times B$?

- $\{\emptyset, \emptyset\}$ (\emptyset, \emptyset) $(\emptyset, \{\emptyset\})$ $(\{\emptyset\}, 6)$

Opgave 16 (6%)

Betragt grafen G i figur 1.

Afkryds sandhedsværdien af følgende 5 udsagn:

a. G er en simpel graf.

Sand

Falsk

b. G er sammenhængende (connected).

Sand

Falsk

c. G har en Euler kreds (Euler circuit).

Sand

Falsk

d. G har en Hamilton kreds.

Sand

Falsk

d. G har en Hamilton vej (Hamilton path).

Sand

Falsk

Opgave 17 (6%)

Betragt igen grafen G i figur 1.

a. Hvad er graden (degree) af punktet (vertex) v

- 1 2 3 4 5 6

b. Hvad er det største antal punkter i en komplet delgraf af G

- 1 2 3 4 5 6

c. Hvad er længden af en korteste *simpel* kreds i G

- 1 2 3 4 5 6

d. Hvor mange kanter er der i et udspændende træ af G

- 0 1 6 7 8 14