Eksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

Mandag den 17. juni, 2013. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 14 opgaver.

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ____________________________

STUDIENUMMMER: ____________________________

Facitliste (ej besvarelse) sidst i sættet.

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8 %).

Lad $T = \{1, 2\}$ og $S = \{0, 2, 4, 6\}$.

1. Opskriv potensmængden (the power set) $\mathcal{P}(T)$.
2. Opskriv potensmængden (the power set) $\mathcal{P}(S)$.
3. Bestem $\mathcal{P}(T) \cap \mathcal{P}(S)$.

Opgave 2 (8 %).

1. Find ved hjælp af Euklids algoritme største fælles divisor mellem 1050 og 825.
2. Find heltal s og t, så $\gcd(1050, 825) = s1050 + t825$.

Opgave 3 (8 %).

Vis vha. vidner (C, k), at $2X^2 + X$ er $\mathcal{O}(X^2)$.

Opgave 4 (10 %).

Betragt to relationer R og S på mængden $\{a, b, c, d, e\}$:

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\},$$

$$S = \{(b, a), (c, b), (d, c), (e, d), (a, e)\}.$$

1. Opskriv matricen M_R, der repræsenterer R.
2. Opskriv matricen M_S, der repræsenterer S.
3. Find matricen $M_{S \circ R}$, der repræsenterer den sammensatte relation $S \circ R$.

Opgave 5 (8 %).

Brug flettesorteringsalgoritmen (merge sort) til at sortere listen

$$8, 5, 6, 4, 1, 2, 3, 7$$

efter voksende størrelse. Husk, at tage mellemregninger med.

Opgave 6 (8 %).

Giv et induktionsbevis for følgende sætning:

Sætning: For alle heltal n, $n \geq 4$ gælder der $2^n < n!$.

Opgave 7 (6 %).

Hvad bliver resultatet (ifølge binomialsætningen), hvis alle paranteser ganges ud i udtrykket $(X - Y)^7$?

Opgave 8 (12 %).

Lad $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$.

1. Argumenter for, at disse tal er parvist indbyrdes primiske (pairwise relatively prime).
2. Udregn $M_1 = m_2 m_3$, $M_2 = m_1 m_3$ og $M_3 = m_1 m_2$.
3. Find ved at prøve dig frem heltal y_1, y_2 og y_3, så

$$\begin{aligned} M_1 y_1 &\equiv 1 \pmod{m_1} \\ M_2 y_2 &\equiv 1 \pmod{m_2} \\ M_3 y_3 &\equiv 1 \pmod{m_3} \end{aligned}$$

4. Benyt metoden fra den kinesiske restsætning (kaldet den kinesiske restalgoritme) til at bestemme en løsning til

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv 2 \pmod{m_2} \\ x \equiv 3 \pmod{m_3}. \end{cases}$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (2 %).

Lad S være en mængde med 5 elementer. Betragt den tilhørende potensmængde (power set) $\mathcal{P}(S)$. Hvilket af følgende tal svarer til størrelsen (kardinaliteten) af $\mathcal{P}(S)$? (der må kun sættes et kryds).

- ☐ 0
- ☐ 5
- ☐ 16
- ☐ 31
- ☒ 32
- ☐ 64

Opgave 10 (4 %).

Lad A og B være mængder, hvor B er ikke-tom. Det oplyses, at

$$(A \cup B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

og

$$A \subseteq A \cap B.$$

Hvilket af følgende udsagn er sandt? (der må kun sættes et kryds).

- ☒ $A = \emptyset$
- ☐ $A = B$
- ☐ $B \subseteq A$

Opgave 11 (4 %).

Lad t være et tal i $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, som opfylder $3t \equiv 1 \pmod 7$. Da er t lig (der må kun sættes et kryds):

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☒ 5
- ☐ 6

Opgave 12 (8 %).

Betragt grafen $G = (V, E)$ med nabomatrix (adjacency matrix)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Besvar følgende to JA/NEJ spørgsmål:

a. Har grafen G en Hamiltonkreds (Hamilton circuit)?

☒ JA ☐ NEJ

b. Har grafen G en Eulerkreds (Euler circuit)?

☐ JA ☒ NEJ

Opgave 13 (2 %).

Er det sandt, at funktionen $\cos(x)$ er $\mathcal{O}(x)$?

☒ JA ☐ NEJ

Opgave 14 (12 %).

I det følgende er p, q og r udsagn. Besvar følgende to JA/NEJ spørgsmål:

a. Gælder der $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$?

☐ JA ☒ NEJ

b. Gælder der $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv r$?

☐ JA ☒ NEJ

Betragt udsagnsfunktionen $P(x, y)$: "$x > y$", hvor både x og y antager værdier i (the universe of discource is) $\{1, 2, 3\}$. Besvar følgende to JA/NEJ spørgsmål:

c. Udsagnet $\forall x \exists y \neg P(x, y)$ har sandhedsværdien sand?

☒ JA ☐ NEJ

d. Udsagnet $\neg \exists x \forall y \neg P(x, y)$ har sandhedsværdien sand?

☐ JA ☒ NEJ

Opg. 1

1) $P(T) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

2) $P(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{0,2\}, \{0,4\}, \{0,6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{0,2,4\}, \{0,2,6\}, \{0,4,6\}, \{2,4,6\}, \{0,2,4,6\}\}$

3) $P(T) \cap P(S) = \{\emptyset, \{2\}\}$

Opg. 2

1) 75

2) $75 = 4 \cdot 1050 - 5 \cdot 825$

Opg. 3 Mange svar. Eksempelvis

$$(c, k) = (3, 1)$$

Opg. 4

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{S \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

opg. 5

$$ms(8,5,6,4,1,2,3,7\}$$

$$= m(ms(8,5,6,4),\ ms(1,2,3,7)\}$$

$$= m(m(ms(8,5),ms(6,4)),\ m(ms(1,2),ms(3,7)))$$

$$= m(m(m(ms(8),ms(5)),m(ms(6),ms(4))),$$
$$(m(m(ms(1),ms(2)),m(ms(3),ms(7))))$$

$$= m(m(m((8),(5)),m((6),(4))),$$
$$(m(m((1),(2)),m((3),(7))))$$

$$= m(m((5,8),(4,6)),\ m((1,2),(3,7)))$$

$$= m((4,5,6,8),(1,2,3,7))$$

$$= (1,2,3,4,5,6,7,8)$$

Bevis

Beviset er et induktionsbevis.

opg 6

Basistrin $n=4$

$$vs = 2^n = 2^4 = 16$$

$$hs = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$vs < hs$ ok

Induktionstrin

Lad $k \geq 4$. Antag, at

$$2^k < k!$$

Vi skal vise at $2^{k+1} < (k+1)!$

$$vs = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k+1)k!$$
$$= (k+1)! = hs$$

$\square$

opg. 7 $-y^7 + 7xy^6 - 21x^2y^5 + 35x^3y^4 - 35x^4y^3$
$+21x^5y^2 - 7x^6y + x^7$

opg. 8
1) $\gcd(2,3)=1$, $\gcd(2,5)=1$, $\gcd(3,5)=1$
2) $M_1 = 15$ $M_2 = 10$ $M_3 = 6$
3) $y_1 = 1$ $y_2 = 1$ $y_3 = 1$
4) 23 (eller 53 eller andet tal som er kongruent til 23 modulo 30)