Eksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

Torsdag den 7. juni, 2012. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLD:
☐ Matematik, Matematikøkonomi, Fysik.
☐ Datalogi, Software

Del I (”almindelige opgaver”)

Opgave 1 (8 %).

Betragt en relation R på mængden $\{a, b, c, d, e\}$ givet ved

$$R = \{(a, b), (b, a), (a, e), (b, c), (e, d), (d, c)\}.$$

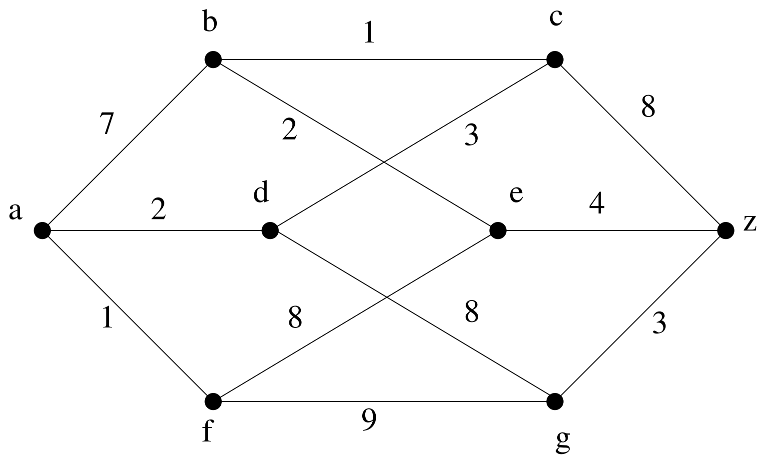
1. Bestem matricen M_R der repræsenterer relationen R.
2. Bestem den transitive afslutning (closure) R^*.

Opgave 2 (5 %).

Find ved hjælp af Euklids algoritme største fælles divisor mellem 108 og 150.

Opgave 3 (8 %).

1. Find det mindste positive heltal (integer) a så $(\log(x) + x^2)(x^3 + 7x)$ er $\mathcal{O}(x^a)$.
2. Der gælder at x^2 er $\mathcal{O}(2x^2 + 2)$. Find tilhørende vidner (C, k).



Figur 1:

Opgave 4 (10 %).

Bestem ved hjælp af Dijkstras algoritme længden af en korteste vej fra a til z i grafen vist i figur 1. Opskriv grafens punkter i rækkefølge bestemt ved voksende afstand fra a.

Opgave 5 (8 %).

Bestem et minimum vægt udspændende træ for grafen i figur 1. Angiv hvilken algoritme der benyttes, og angiv den rækkefølge hvori kanterne tilføjes til træet.

Opgave 6 (11 %).

Giv et induktionsbevis for resultatet $\sum_{i=1}^{n}(2i) = n(n+1)$.

Nedenfor finder du opgave 7A og opgave 7B. Du må alene besvare en af disse. Afleverer du alligevel besvarelser af begge, da indgår en tilfældig af dem i bedømmelsen.

Opgave 7A (7 %).

Betragt algoritmen:

> **Procedure** prod($a_1, a_2, \ldots, a_n$: heltal)
> $res := 0$
> **for** $i := 1$ to n
>   **for** $j := 1$ to n
> $res := res + a_i \cdot a_j$
> **end** $\{res$ er lig $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2\}$

Giv store-$\mathcal{O}$ vurdering af antallet af operationer i algoritmen ovenfor. Husk at argumentere for dit svar.

Opgave 7B (7 %).

Bevis nedenstående sætning ved hjælp af kontraposition (contraposition):

Sætning
Hvis $p^2 \equiv 1 \pmod 2$ så $p \equiv 1 \pmod 2$.

Nedenfor finder du opgave 8A og opgave 8B. Du må alene besvare en af disse. Afleverer du alligevel besvarelser af begge, da indgår en tilfældig af dem i bedømmelsen.

Opgave 8A (8 %).

Benyt flette-sorteringsalgoritmen (mergesort) til at sortere listen $8, 2, 4, 5, 1, 7$.

Opgave 8B (8 %).

Løs rekurrensrelationen (differensligningen)

$$a_n = -4a_{n-1} + 5a_{n-2}$$

med begyndelsesbetingelser (initial conditions)

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= -4 \end{aligned}$$

Opgave 9 (12 %).

Betragt følgende algoritme:

Procedure talfølge(n: positivt heltal)
$x := -1$
$y := -3$
$i := 1$
while $i < n$
begin
  $z := 2x - y$
  $y := x$
  $x := z$
  $i := i + 1$
end

1. Vis at følgende udsagn er en invariant for while-løkken:

$$i \in \mathbb{N} \ \wedge \ i \leq n \ \wedge \ x = 2i - 3 \ \wedge \ y = 2i - 5.$$

2. Hvad er værdien af x når algoritmen standser? Begrund dit svar.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 10 (12 %).

Besvar følgende fire JA/NEJ spørgsmål:

a. Er $p \wedge q \to p \vee q$ en tautologi?

☐ JA ☐ NEJ

b. Er $p \vee q \to p \wedge q$ en tautologi?

☐ JA ☐ NEJ

c. Gælder der $(p \to q) \to r \equiv p \wedge r$?

☐ JA ☐ NEJ

d. Gælder der

$$\forall x \exists y P(x,y) \equiv \forall y \exists x P(x,y)$$

for vilkårlig udsagnsfunktion $P(x,y)$ og vilkårlige definitionsmængder (universes)?

☐ JA ☐ NEJ

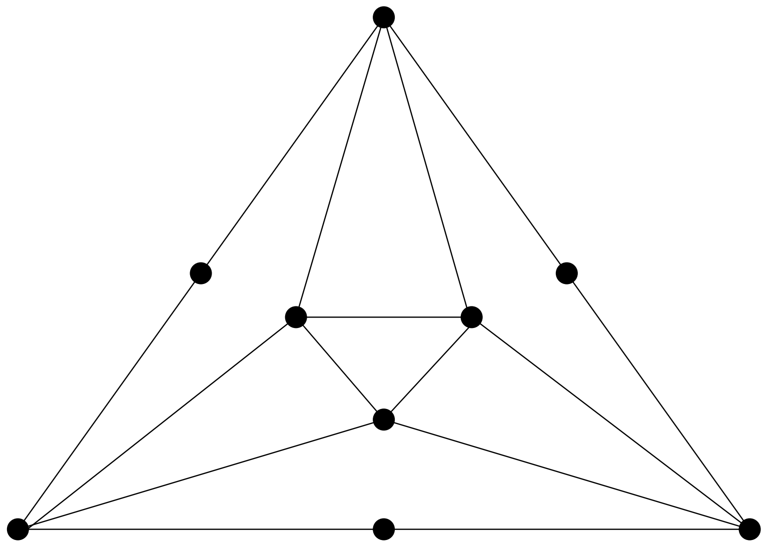
Opgave 11 (4 %).

Mængden S er givet rekursivt ved

$$1 \in S$$
$$\text{Hvis } x \in S \text{ så } x+5 \in S \text{ og } x-5 \in S$$

Hvilket af følgende tal ligger i S?

☐ -6 ☐ 0 ☐ 11 ☐ 15



Figur 2:

Opgave 12 (7 %).

Betragt grafen i figur 2. Besvar følgende to JA/NEJ spørgsmål:

a. Har grafen en Hamilton-kreds (Hamilton circuit)?

☐ JA ☐ NEJ

b. Har grafen en Euler-kreds (Euler circuit)?

☐ JA ☐ NEJ