# Facit til eksamen i Diskret Matematik

## Torsdag den 7. juni, 2012. Kl. 9-13.

Dette er ikke en komplet besvarelse af opgaverne. Kun facit.

## Del I ("almindelige opgaver")

### Opgave 1.

Betragt en relation $R$ på mængden $\{a, b, c, d, e\}$ givet ved

$$R = \{(a, b), (b, a), (a, e), (b, c), (e, d), (d, c)\}.$$

1. $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

2. $R^*$ kan repræsenteres som en mængde af par, som en graf, eller med matricen $M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

### Opgave 2.

$\gcd(108, 150) = 6$

### Opgave 3.

1. $a = 5$ er det mindste positive heltal så $(\log(x) + x^2)(x^3 + 7x)$ er $\mathcal{O}(x^a)$.
2. Der gælder at $x^2$ er $\mathcal{O}(2x^2 + 2)$. Vidner f.eks.: $(C, k) = (\frac{1}{2}, 0)$.

## Opgave 4.

Længden af en korteste vej fra $a$ til $z$ er 12.
Grafens punkter i rækkefølge bestemt ved voksende afstand fra $a$ (Den rækkefølge hvori punkterne tilføjes til mængden $S$): $a, f, d, c, b, e, g, z$.

## Opgave 5.

Da flere kanter har samme vægt er der flere korrekte svar. F. eks.:

Prims algoritme: $\{a, f\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{e, z\}, \{g, z\}$.

Kruskals algoritme: $\{a, f\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{g, z\}, \{e, z\}$.

## Opgave 6.

Giv et induktionsbevis for resultatet $\sum_{i=1}^{n}(2i) = n(n+1)$.

Vi beviser resultatet for $n \geq 1$.

**Basisskridt**, $n = 1$: ok.

**Induktionsskridt:** Lad $k \geq 1$ og antag at ligning er sand for $n = k$. For $n = k+1$ får vi da:
$\sum_{i=1}^{k+1}(2i) = \sum_{i=1}^{k}(2i) + (2(k+1)) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+2)(k+1) = (k+1)((k+1)+1)$.
Ligningen er altså også sand for $n = k+1$.

Dermed er resultatet sandt for alle $n \geq 1$.

(Alternativt kan man bevise resultatet for $n \geq 0$. Basisskridtet er da for $n = 0$: venstre-siden er en tom sum og er dermed 0, højresiden er også 0.)

## Opgave 7A.

Antal operationer i algoritmen: $\mathcal{O}(n^2)$.

## Opgave 7B.

Kontrapositivt udsagn:
Hvis $p \not\equiv 1 \pmod 2$ så $p^2 \not\equiv 1 \pmod 2$.

Altså:
Hvis $p \equiv 0 \pmod 2$ så $p^2 \equiv 0 \pmod 2$.

## Opgave 8A.

–

## Opgave 8B.

Rekurrensrelationen $a_n = -4a_{n-1} + 5a_{n-2}$ med begyndelsesbetingelser

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= -4 \end{aligned}$$

har løsning $a_n = (-5)^n + 1$.

## Opgave 9.

1. Følgende udsagn er en invariant for while-løkken:

   $$i \in \mathbb{N} \;\wedge\; i \leq n \;\wedge\; x = 2i - 3 \;\wedge\; y = 2i - 5,$$

   da ...

2. Når algoritmen standser er $i = n$ og (ifølge invarianten) $x = 2i - 3 = 2n - 3$.

## Del II (”multiple choice” opgaver)

### Opgave 10.

a. Er $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ en tautologi?

☒ JA ☐ NEJ

b. Er $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ en tautologi?

☐ JA ☒ NEJ

c. Gælder der $(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv p \wedge r$?

☐ JA ☒ NEJ

d. Gælder der

$$\forall x \exists y P(x, y) \equiv \forall y \exists x P(x, y)$$

for vilkårlig udsagnsfunktion $P(x, y)$ og vilkårlige definitionsmængder

☐ JA ☒ NEJ

### Opgave 11.

☐ -6 ☐ 0 ☒ 11 ☐ 15

### Opgave 12.

a. Har grafen $G$ en Hamilton-kreds?

☐ JA ☒ NEJ

b. Har grafen $G$ en Euler-kreds?

☒ JA ☐ NEJ