Reeksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

15. august 2017. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 11 nummererede sider med ialt 15 opgaver. Alle opgaver er "multiple choice" opgaver. **Besvarelsen skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på besvarelsen.

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

Der er kun ét rigtigt svar til hvert spørgsmål.

Opgave 1 (8 %)

1. Hvor mange rækker er der i en sandhedstabel for det sammensatte udsagn

$$(p \vee r) \wedge (r \rightarrow q) \vee s$$

☐ 1 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 12 ☒ 16

2. Er de sammensatte udsagn $\neg(p \wedge q)$ og $\neg p \vee q$ ækvivalente?

☐ Ja ☒ Nej

3. Er det sammensatte udsagn $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ en tautologi?

☒ Ja ☐ Nej

4. Er de sammensatte udsagn $\neg(p \rightarrow q)$ og $(p \wedge \neg q)$ ækvivalente?

☒ Ja ☐ Nej

Opgave 2 (4 %)

Hvilken slutningsregel (rule of inference) benyttes i følgende argument:

"Jeg tager til London eller Paris. Jeg tager ikke til London. Derfor, skal jeg til Paris."

☐ Konjunktion
☐ Modus tollens
☐ Modus ponens
☐ Kædeslutningsregel (hypothetical syllogism)
☒ Disjunktiv syllogisme (disjunctive syllogism)

Opgave 3 (10 %)

Lad $A = \{1, 2, 5, \{6\}\}$, og $B = \{\emptyset, 1, \{2\}, 6, 7\}$, være mængder.

1. Er $\{2\} \subseteq B$?

   ☐ Ja ☒ Nej

2. Hvad er kardinaliteten af $A \cap B$?

   ☐ 0 ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

3. Hvad er kardinaliteten af $A \cup B$?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒ 8 ☐ 9

4. Hvad er kardinaliteten af potensmængden $\mathcal{P}(A)$?

   ☐ 0 ☐ 2 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 12 ☒ 16 ☐ 22 ☐ 32

5. Hvad er kardinaliteten af $A \times B$?

   ☐ 0 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 10 ☒ 20 ☐ 200 ☐ 2^9

Opgave 4 (9 %)

Lad

$$f(x) = x^3 \log(x^2) + \log(x^{10} + 1) + x^3,$$

for $x > 0$.

Besvar følgende sand/falsk opgaver.

1. $f(x)$ er $O(x^{10})$	☒ Sand	☐ Falsk
2. $f(x)$ er $O(x^3 \log x)$	☒ Sand	☐ Falsk
3. $f(x)$ er $O(x^3)$	☐ Sand	☒ Falsk
4. $f(x)$ er $\Omega(x^{10})$	☐ Sand	☒ Falsk
5. $f(x)$ er $\Omega(x^3 \log x)$	☒ Sand	☐ Falsk
6. $f(x)$ er $\Omega(x^3)$	☒ Sand	☐ Falsk
7. $f(x)$ er $\Theta(x^{10})$	☐ Sand	☒ Falsk
8. $f(x)$ er $\Theta(x^3 \log x)$	☒ Sand	☐ Falsk
9. $f(x)$ er $\Theta(x^3)$	☐ Sand	☒ Falsk

Opgave 5 (4 %)

$(5 + 55 + 101)(576 \cdot 555 + 10000000002)$ **mod** 5 er lig med

☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4

Opgave 6 (7 %)

Hvad er den inverse til 7 modulo 53?

☐ 14 ☐ 15 ☐ 16 ☐ 17 ☐ 37 ☒ 38 ☐ 39 ☐ 43 ☐ 45

Opgave 7 (5 %)

Betragt følgende algoritme:

```
procedure Alg(n: positive integer)
a := 1
b := 1
for i := 1 to n
    for j := 1 to 1000000
        for k := 1 to n
            a := a · b
    b := 3 · b
return a
```

Antallet af multiplikationer, der bruges af denne algoritme, er

☐ $O(n)$ ☐ $\Theta(n^2 \log n)$ ☒ $O(n^2)$ ☐ $\Theta(n^3)$ ☐ $O(n \log n)$

Opgave 8 (6 %)

Lad $(2x - y)^5 = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5$, hvor a, b, c, d, e, f er heltal.

1. Der gælder at a er lig

   ☐ -1 ☐ 1 ☐ 8 ☐ 5 ☐ 16 ☒ 32 ☐ 100

2. Der gælder at c er lig

   ☐ -80 ☐ -40 ☐ -20 ☐ -10 ☐ 10 ☐ 20 ☐ 40 ☒ 80

3. Der gælder at d er lig

   ☐ -80 ☒ -40 ☐ -20 ☐ -10 ☐ 10 ☐ 20 ☐ 40 ☐ 80

Opgave 9 (4 %)

Betragt følgende mængde af heltal

$$S = \{x \mid -63 \leq x \leq 126 \ \wedge \ x \equiv 5 \ (\textbf{mod } 7) \ \wedge \ x \equiv 5 \ (\textbf{mod } 9)\}$$

Hvor mange heltal er der i S?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 63 ☐ 126 ☐ 189

Opgave 10 (6 %)

Betragt følgende lineære homogene rekursionsrelation

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}.$$

Hvilken af følgende er løsningen til denne rekursionsrelation (α_1 og α_2 er konstanter)?

☐ $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2(-3)^n$
☐ $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 3^n$
☐ $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n$
☒ $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$
☐ $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-3)^n$

Opgave 11 (6 %)

En mængde S af heltal er defineret rekursivt ved

- $0 \in S, 5 \in S$ og $6 \in S$
- hvis $a \in S$ og $b \in S$ så er $a + b$ også i S.

Besvar følgende spørgsmål om S

1. Hvad det største heltal, der ikke ligger i S?

   ☐ 9 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 18 ☒ 19 ☐ 20 ☐ 21 ☐ 22 ☐ 23

2. S består af alle tal på formen $5r + 6t$ hvor r og t er hele tal der opfylder ...
   Angiv den korrekte fortsættelse.

   ☐ $r > 0 \wedge s > 0$
   ☒ $r \geq 0 \wedge s \geq 0$
   ☐ $r \geq 0 \wedge s \geq 0 \wedge r + t > 0$
   ☐ $r \geq 1 \vee s \geq 0$
   ☐ $r > 6 \vee s \geq 5$

Opgave 12 (10 %)

Lad $A = \{1,2,3,4\}$ være en mængde. Betragt følgende tre relationer på A

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,4),(3,2)\}$$

$$S = \{(1,4),(1,3),(2,3),(3,1),(4,1)\}$$

$$T = \{(1,2),(2,3),(3,4),(2,1)\}$$

1. Besvar følgende sand/falsk opgaver:

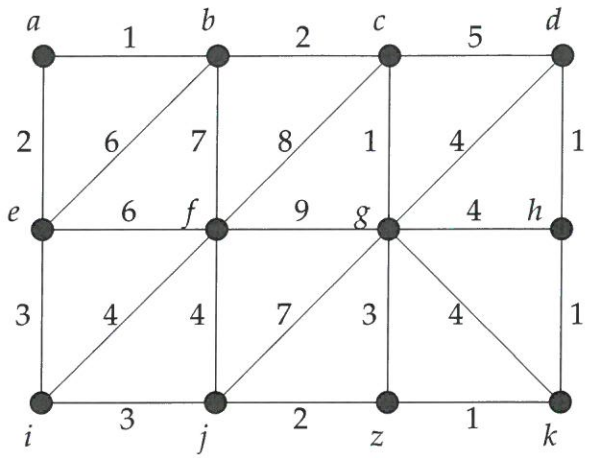
R er refleksiv	☐ Sand	☒ Falsk
R er symmetrisk	☐ Sand	☒ Falsk
R er antisymmetrisk	☒ Sand	☐ Falsk
R er transitiv	☐ Sand	☒ Falsk
$(2,1) \in S \circ R$	☒ Sand	☐ Falsk
$(2,1) \in R \circ S$	☐ Sand	☒ Falsk

2. Hvor mange par (a,b) er der i den symmetriske afslutning (symmetric closure) af S?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

3. Hvor mange par (a,b) er der i den transitive afslutning (transitive closure) af T?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10



Figur 1: Grafen G, der betragtes i opgaverne 13 og 14.

Opgave 13 (10 %)

I denne opgave bruger vi Dijkstras algoritme (se Figur 2 på Side 11) på grafen i Figur 1.

1. Hvad er længden af en korteste vej fra a til z (som bestemmes af Dijkstras algoritme)?

   ☐ 6 ☒ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13

2. I hvilken rækkefølge tilføjes punkter til mængden S?

   ☐ a, b, c, g, z
   ☐ a, b, e, c, g, i, j, z
   ☒ a, b, e, c, g, i, z
   ☐ a, b, c, g, i, z
   ☐ a, b, e, c, g, z
   ☐ a, b, c, e, i, g, z
   ☐ $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, z$

Opgave 14 (5 %)

Hvad er vægten af et minimum udspændende træ af grafen G i Figur 1?

☐ 19 ☐ 20 ☒ 21 ☐ 22 ☐ 23 ☐ 24 ☐ 25 ☐ 26 ☐ 27

Opgave 15 (6 %)

Lad T være et fuldt binært træ med 6 blade.

1. Hvor mange punkter (vertices) har T i alt?

   ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11 ☐ 12

2. Hvad er den mindst mulige højde af T?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

3. Hvad er den størst mulige højde af T?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7

```
procedure Dijkstra(G: weighted connected simple graph, with
    all weights positive)
{G has vertices a = v_0, v_1, ..., v_n = z and lengths w(v_i, v_j)
    where w(v_i, v_j) = ∞ if {v_i, v_j} is not an edge in G}
for i := 1 to n
    L(v_i) := ∞
L(a) := 0
S := ∅
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all
    other labels are ∞, and S is the empty set}
while z ∉ S
    u := a vertex not in S with L(u) minimal
    S := S ∪ {u}
    for all vertices v not in S
        if L(u) + w(u, v) < L(v) then L(v) := L(u) + w(u, v)
        {this adds a vertex to S with minimal label and updates the
        labels of vertices not in S}
return L(z) {L(z) = length of a shortest path from a to z}
```

Figur 2: