Reeksamen i Diskret Matematik

Første studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

23. august, 2016, 9.00-13.00

Dette eksamenssæt består af 11 nummerede sider med 16 opgaver. Alle opgaver er "multiple choice" opgaver. **Besvarelsen skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på besvarelsen.

NAVN: ________________________________

STUDIENUMMMER: ________________________________

Der er kun ét rigtigt svar til hvert spørgsmål.

Opgave 1 (8 %)

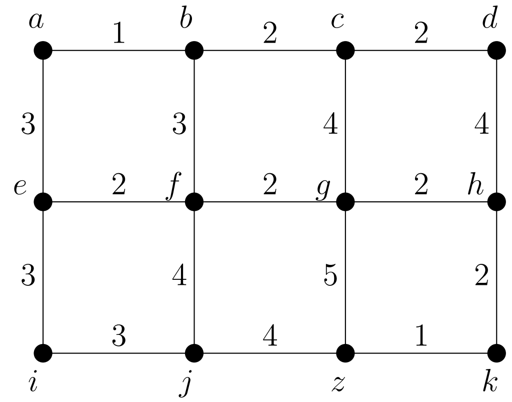
Lad $f(x) = 2x^3 + 3x^2 \log x + 7x + 1$, for $x > 0$.
Besvar følgende sand/falsk opgaver.

1. $f(x)$ er $O(x^3 \log x)$ ☐ Sand ☐ Falsk
2. $f(x)$ er $O(x^3)$ ☐ Sand ☐ Falsk
3. $f(x)$ er $O(x^2 \log x)$ ☐ Sand ☐ Falsk
4. $f(x)$ er $\Omega(x^3 \log x)$ ☐ Sand ☐ Falsk
5. $f(x)$ er $\Omega(x^3)$ ☐ Sand ☐ Falsk
6. $f(x)$ er $\Omega(x^2 \log x)$ ☐ Sand ☐ Falsk
7. $f(x)$ er $\Theta(x^3 \log x)$ ☐ Sand ☐ Falsk
8. $f(x)$ er $\Theta(x^3)$ ☐ Sand ☐ Falsk
9. $f(x)$ er $\Theta(x^2 \log x)$ ☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 2 (4 %)

Hvilket af følgende tal er en invers til 17 modulo 50?

☐ -3 ☐ 1 ☐ 3 ☐ 11 ☐ 33



Figur 1: Grafen G, som betragtes i opgaverne 3, 4 og 5.

Opgave 3 (8 %)

I denne opgave bruger vi Dijkstras algoritme (se Figur 2 på Side 11) på grafen i Figur 1.

1. Hvad er længden af en korteste vej fra a til z (som bestemmes af Dijkstras algoritme)?

   ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14

2. Hvilket af følgende punkter tilføjes først til mængden S

   ☐ d ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

3. Hvilket af følgende punkter tilføjes sidst til S

   ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ z

Opgave 4 (5 %)

Hvad er vægten af et minimum udspændende træ af grafen i Figur 1.

☐ 19 ☐ 20 ☐ 21 ☐ 22 ☐ 23 ☐ 24 ☐ 25 ☐ 26

Opgave 5 (6 %)

G betegner i denne opgave grafen i Figur 1. (Vi ser bort fra G's kantvægte i denne opgave.)

1. Besvar følgende sand/falsk opgaver.

   G har en Euler kreds ☐ Sand ☐ Falsk

   G har en Hamilton kreds ☐ Sand ☐ Falsk

2. Hvad er antallet af kanter i et udspændende træ af G ?

   ☐ 1 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 7 ☐ 9 ☐ 11 ☐ 13 ☐ 15 ☐ 17

3. Hvad er graden (degree) af punktet z ?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 11

Opgave 6 (10 %)

En følge af tal $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ er defineret rekursivt ved

- $a_1 = 0$
- For $n \geq 2$ lad m være et heltal sådan at $n = 2m$ eller $n = 2m + 1$. Så er $a_n = a_m + 1$.

Husk at $\log x$ betegner logaritmen af x med grundtal (base) 2, og at $\lfloor x \rfloor$ er det største heltal, som er mindre end eller lig med x. F.eks. er $a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1$.

Lad $P(n)$ betegne den følgende påstand

$$a_n = \lfloor \log n \rfloor.$$

Vi ønsker at bevise ved induktion eller stærk induktion at $P(n)$ er sand for ethvert heltal $n \geq 1$.

1. Hvad er det korrekte basisskridt af induktions beviset

   ☐ Bevise at $P(0)$ er sand
   ☐ Bevise at $P(1)$ er sand
   ☐ Bevise at $P(2)$ er sand
   ☐ Bevise at $P(n)$ er sand, for alle $n \leq 1$

2. Hvilket af følgende er en korrekt skitse af induktionsskridtet?

   ☐ Lad $k \geq 1$ og antag at $P(k)$ er sand. Lad $m = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$.
   Ifølge induktionsantagelsen er $2^{a_m} \leq m \leq 2^{a_m+1} - 1$. Anvend dette til at bevise $P(k+1)$.

   ☐ Lad $k \geq 1$ og antag at $P(k)$ er sand. Lad $m = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$.
   Ifølge induktionsantagelsen er $a_m \leq 2^m \leq a_m + 1$.
   Anvend dette til at bevise $P(k+1)$.

   ☐ Lad $k \geq 1$ og antag at $P(j)$ er sand for alle j hvor $0 \leq j \leq k$. Lad $m = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$.
   Ifølge induktionsantagelsen er $2^{a_m} \leq m \leq 2^{a_m+1} - 1$. Anvend dette til at bevise $P(k+1)$.

   ☐ Lad $k \geq 1$ og antag at $P(j)$ er sand for alle j hvor $1 \leq j \leq k$. Lad $m = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$.
   Ifølge induktionsantagelsen er $2^{a_m} \leq m \leq 2^{a_m+1} - 1$. Anvend dette til at bevise $P(k+1)$.

   ☐ Lad $k \geq 1$ og antag at $P(j)$ er sand for alle j hvor $1 \leq j \leq k$. Lad $m = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$.
   Ifølge induktionsantagelsen er $a_m \leq 2^m \leq a_m + 1$.
   Anvend dette til at bevise $P(k+1)$.

Opgave 7 (6 %)

Betragt følgende lineære homogene rekursionsrelation

$$a_n = 4a_{n-2}.$$

1. Hvad er graden (degree) af denne rekursionsrelation?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 4

2. Hvilken af følgende er løsningen til denne rekursionsrelation (α_1 og α_2 er konstanter)?

   ☐ $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 \cdot 3^n$
   ☐ $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 \cdot 2^n$
   ☐ $a_n = \alpha_1 + \alpha_2(-2)^n$
   ☐ $a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2$

Opgave 8 (5 %)

Betragt følgende algoritme:

procedure *multiplications*(n: positive integer)
$t := 1$
for $i := 1$ **to** n
  $j := 1$
  while $j \leq n$
    $j := 2 \cdot j$
    $t := t + 1$
return t

Antallet af multiplikationer, der bruges af denne algoritme er

☐ $O(n)$ ☐ $\Theta(n)$ ☐ $O(n \log n)$ ☐ $\Omega(n^2)$

Opgave 9 (8 %)

1. Er det sammensatte udsagn $p \wedge q \to p \vee q$ en tautologi?

   ☐ Ja ☐ Nej

2. Er de sammensatte udsagn $p \wedge q$ og $p \vee q$ ækvivalente?

   ☐ Ja ☐ Nej

3. Hvor mange rækker er der i en sandhedstabel for det sammensatte udsagn

$$p \vee q \to p \wedge q$$

   ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 10

Opgave 10 (4 %)

Hvilken slutningsregel benyttes i følgende argument:
"Hvis det er sommer så er der solskin. Det er sommer. Derfor er der solskin."

☐ Konjunktion
☐ Modus ponens
☐ Modus tollens
☐ Kædeslutningsregel (hypothetical syllogism)
☐ Universel generalisering

Opgave 11 (5 %)

Hvad er værdien af $(123 + 1234 + 12345 \cdot 222) \mod 10$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Opgave 12 (8 %)

Betragt de følgende to relationer på mængden $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 1)\}$$

$$S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}.$$

1. Besvar følgende sand/falsk opgaver:

S er refleksiv	☐ Sand	☐ Falsk
S er antisymmetrisk	☐ Sand	☐ Falsk
S er symmetrisk	☐ Sand	☐ Falsk
S er transitiv	☐ Sand	☐ Falsk
R er transitiv	☐ Sand	☐ Falsk

2. Lad R^* betegne den transitive afslutning af R. Hvor mange par (a, b) er der i R^* ?

   ☐ 6 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 12 ☐ 20 ☐ 25

Opgave 13 (5 %)

Lad $(x+2y)^6 = ax^6+bx^5y+cx^4y^2+dx^3y^3+ex^2y^4+fxy^5+gy^6$, hvor a, b, c, d, e, f, g er hele tal.

1. Hvad er værdien af c?

   ☐ 4 ☐ 15 ☐ 60 ☐ 64 ☐ 80

2. Hvad er værdien af g?

   ☐ 4 ☐ 15 ☐ 60 ☐ 64 ☐ 80

Opgave 14 (6 %)

Lad $A = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ og $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ være mængder.

1. Hvad er kardinaliteten af $A \cap B$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

2. Hvad er kardinaliteten af $A \cup B$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

3. Hvad er kardinaliteten af $A \times B$?

   ☐ 9 ☐ 12 ☐ 15 ☐ 16 ☐ 20 ☐ 25

4. Hvilket af følgende er et element i potensmængden $\mathcal{P}(B)$?

   ☐ $\{\{\emptyset\}\}$ ☐ $\{1\}$ ☐ $\{1, 2\}$ ☐ $\{\emptyset, 1, 2\}$

Opgave 15 (4 %)

Hvilket af følgende udsagn er ækvivalent med $\forall x \exists y (\neg P(x) \wedge Q(y))$?

☐ $\neg \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y))$

☐ $\neg \exists x \forall y (P(x) \vee \neg Q(y))$

☐ $\neg \exists y \forall x (P(x) \wedge \neg Q(y))$

☐ $\exists x \forall y (P(x) \vee \neg Q(y))$

☐ $\neg \exists y \forall x (P(x) \vee Q(y))$

Opgave 16 (8 %)

Betragt følgende algoritme:

procedure *sequence*(n: positive integer)
$i := 0$
$x := 2$
while $i < n$
  $i := i + 1$
  $x := 3x + 2$
return x

1. Hvilket af følgende udsagn er en løkke-invariant for while-løkken i denne algoritme?

   ☐ $i \leq n \quad \wedge \quad x = 3^i + 1$
   ☐ $i \leq n - 1 \quad \wedge \quad x = 3^i + 1$
   ☐ $i \leq n \quad \wedge \quad x = 3^{i+1} - 1$
   ☐ $i \leq n - 1 \quad \wedge \quad x = 3^i - 1$
   ☐ $i \leq n \quad \wedge \quad x = 3^n - 1$

2. Hvilken værdi af x returneres af procedure *sequence*?

   ☐ $3^n + 1$ ☐ $3^{n+1} + 1$ ☐ $3^n - 1$ ☐ $3^{n+1} - 1$

procedure *Dijkstra*(G: weighted connected simple graph, with
all weights positive)
$\{G$ has vertices $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ and lengths $w(v_i, v_j)$
where $w(v_i, v_j) = \infty$ if $\{v_i, v_j\}$ is not an edge in $G\}$
for $i := 1$ **to** n
$L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all
other labels are ∞, and S is the empty set}
while $z \notin S$
$u :=$ a vertex not in S with $L(u)$ minimal
$S := S \cup \{u\}$
for all vertices v not in S
if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u, v)$
{this adds a vertex to S with minimal label and updates the
labels of vertices not in S}
return $L(z)$ $\{L(z) =$ length of a shortest path from a to $z\}$

Figur 2: