Eksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Tekniske Fakultet for IT og Design samt Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

29. maj 2017. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 11 nummererede sider med ialt 14 opgaver. Alle opgaver er "multiple choice" opgaver. **Besvarelsen skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på besvarelsen.

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

Der er kun ét rigtigt svar til hvert spørgsmål.

Opgave 1 (10 %)

1. Er det sammensatte udsagn $\neg(p \vee \neg q) \leftrightarrow \neg p \wedge q$ en tautologi?

   ☒ Ja ☐ Nej

2. Er det sammensatte udsagn $\neg(p \leftrightarrow q)$ og $p \leftrightarrow \neg q$ ækvivalente?

   ☒ Ja ☐ Nej

3. Er det sammensatte udsagn $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ en tautologi?

   ☐ Ja ☒ Nej

4. Er det sammensatte udsagn $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$ en tautologi?

   ☐ Ja ☒ Nej

Opgave 2 (4 %)

Hvilket af følgende udsagn er ækvivalent med

$$\neg(\forall x \exists y\ (x = y^2))$$

☐ $\exists x \forall y\ (x = y^2)$
☐ $\forall y \exists x\ (x = y^2)$
☐ $\forall x \exists y\ (x \neq y^2)$
☒ $\exists x \forall y\ (x \neq y^2)$
☐ $\exists y \forall x\ (x \neq y^2)$

Opgave 3 (10 %)

Lad A, B, C, D være mængder, hvor

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \textbf{ mod } 9 = 0\}, \\
B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \textbf{ mod } 3 = 0\}, \\
C &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \textbf{ mod } 15 = 0\}, \\
D &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 17\}.
\end{aligned}
$$

1. Er $A \subseteq B$?

   ☒ Ja ☐ Nej

2. Hvad er kardinaliteten af $B \cap D$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7

3. Hvad er kardinaliteten af potensmængden $\mathcal{P}(C \cap D)$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 6 ☐ 8

4. Hvad er kardinaliteten af $(A \cap D) \times (B \cap D)$?

   ☐ 0 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 10 ☒ 12 ☐ 14 ☐ 16

5. Hvad er kardinaliteten af $(A \cap D) \cup (C \cap D)$?

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 8

Opgave 4 (9 %)

Lad $f(x) = x\log(x^3+1) + x^2\log x + x + \cos x + 123456$, for $x > 0$.
Besvar følgende sand/falsk opgaver.

1. $f(x)$ er $O(x^3)$ ☒ Sand ☐ Falsk
2. $f(x)$ er $O(x\log x)$ ☐ Sand ☒ Falsk
3. $f(x)$ er $O(x^2\log x)$ ☒ Sand ☐ Falsk
4. $f(x)$ er $\Omega(x^3)$ ☐ Sand ☒ Falsk
5. $f(x)$ er $\Omega(x\log x)$ ☒ Sand ☐ Falsk
6. $f(x)$ er $\Omega(x^2\log x)$ ☒ Sand ☐ Falsk
7. $f(x)$ er $\Theta(x^3)$ ☐ Sand ☒ Falsk
8. $f(x)$ er $\Theta(x\log x)$ ☐ Sand ☒ Falsk
9. $f(x)$ er $\Theta(x^2\log x)$ ☒ Sand ☐ Falsk

Opgave 5 (5 %)

Hvad er værdien af 703^{13} **mod** 7?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Opgave 6 (5 %)

Betragt følgende algoritme:

> **procedure** $Alg(n$: positive integer)
> $a := 1$
> $b := 1$
> **for** $i := 1$ **to** n
>   **for** $j := 1$ **to** n
>   **for** $k := 1$ **to** n
> $a := 2 \cdot a$
> $b := 3 \cdot b$
> $c := a + b$
> **return** c

Antallet af multiplikationer, der bruges af denne algoritme, er

☐ $O(n)$ ☒ $\Theta(n^3)$ ☐ $O(n^2)$ ☐ $\Theta(n^5)$ ☐ $O(n^2 \log n)$

Opgave 7 (4 %)

1. Hvad er værdien af $P(7, 2)$?

   ☐ 7 ☐ 14 ☐ 21 ☐ 35 ☒ 42 ☐ 49 ☐ 2520

2. Hvad er værdien af $C(7, 2)$?

   ☐ 7 ☐ 14 ☒ 21 ☐ 35 ☐ 42 ☐ 49 ☐ 2520

Opgave 8 (8 %)

Lad $p = 3$ og $q = 17$ og Lad et RSA public key kryptosystem være givet (side 295 i Rosens bog).

1. Hvilket af de følgene tal er ikke en gyldig krypteringseksponent?

   ☐ 5 ☒ 8 ☐ 11 ☐ 15 ☐ 21 ☐ 27

2. Vi krypterer heltallet $M = 8$ ved hjælp af krypteringseksponenten $e = 3$. Hvad er den krypterede besked C?

   ☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

3. Hvad er dekrypteringseksponenten (decrytion key) d for krypteringseksponenten $e = 3$?

   ☐ 10 ☒ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15 ☐ 16

Opgave 9 (6 %)

Betragt følgende lineære homogene rekursionsrelation

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

1. Hvad er graden (degree) af denne rekursionsrelation?

   ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3

2. Hvilken af følgende er løsningen til denne rekursionsrelation (α_1 og α_2 er konstanter)?

   ☐ $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2$
   ☐ $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 3^n$
   ☐ $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n$
   ☒ $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$
   ☐ $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n$

Opgave 10 (8 %)

Lad $P(n)$ være følgende udsagn

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Vi vil bevise ved induktion at $P(n)$ er sand for alle $n \geq 1$.

1. Hvad er det korrekte basisskridt af induktionsbeviset?

   ☐ Bevise at $P(0)$ er sand
   ☒ Bevise at $P(1)$ er sand
   ☐ Bevise at $P(2)$ er sand
   ☐ Bevise at $P(n)$ er sand, for alle $n \geq 1$

2. Hvilket af følgende er en korrekt skitse af induktionsskridtet?

   ☐ Lad $k \geq 2$ og antag at $P(k)$ er sand. Ifølge induktionsantagelsen er $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Anvend dette til at bevise $P(k+1)$.

   ☒ Lad $k \geq 1$ og antag at $P(k)$ er sand. Ifølge induktionsantagelsen er $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Anvend dette til at bevise $P(k+1)$.

   ☐ Lad $k \geq 1$ og antag at $P(k)$ er sand. Ifølge induktionsantagelsen er $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Anvend dette til at bevise $P(k)$.

   ☐ Lad $k \geq 1$ og antag at $P(k)$ er sand. Ifølge induktionsantagelsen er $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Anvend dette til at bevise $P(k+2)$.

   ☐ Lad $k \geq -1$ og antag at $P(k)$ er sand. Ifølge induktionsantagelsen er $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Anvend dette til at bevise $P(k+1)$.

Opgave 11 (10 %)

Betragt en relation R på mængden $\{a, b, c, d\}$ givet med matricen

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Besvar følgende sand/falsk opgaver:

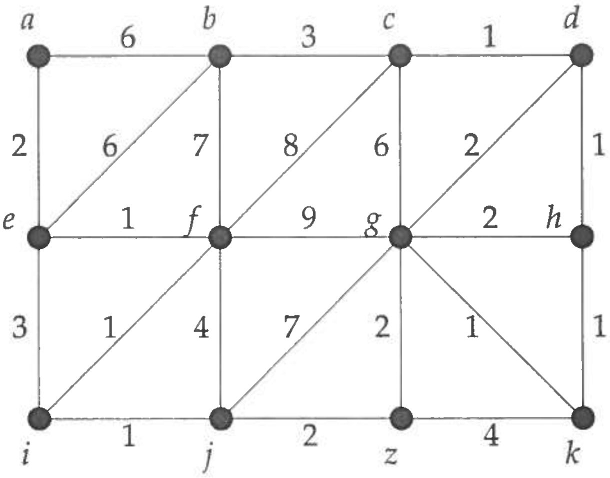
R er refleksiv	☒ Sand	☐ Falsk
R er symmetrisk	☐ Sand	☒ Falsk
R er antisymmetrisk	☒ Sand	☐ Falsk
R er transitiv	☐ Sand	☒ Falsk
R er en ækvivalensrelation	☐ Sand	☒ Falsk

2. Hvad er matricen for relationen R^2?

☒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Hvad er matricen for den symmetriske afslutning (symmetric closure) af R?

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Figur 1: Grafen G, der betragtes i opgaverne 12, 13 og 14.

Opgave 12 (10 %)

I denne opgave bruger vi Dijkstras algoritme (se Figur 2 på Side 11) på grafen i Figur 1.

1. Hvad er længden af en korteste vej fra a til z (som bestemmes af Dijkstras algoritme)?

   ☒ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14

2. I hvilken rækkefølge tilføjes punkter til mængden S?

   ☐ a, e, f, j, z
   ☐ a, e, b, f, i, j, z
   ☐ $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, z$
   ☐ a, e, i, j, z
   ☐ a, e, f, g, z
   ☒ a, e, f, i, j, b, z
   ☐ a, e, f, i, j, z

Opgave 13 (5 %)

Hvad er vægten af et minimum udspændende træ af grafen G i Figur 1?

☐ 14 ☐ 15 ☒ 16 ☐ 17 ☐ 18 ☐ 19 ☐ 20 ☐ 21

Opgave 14 (6 %)

G betegner i denne opgave grafen i Figur 1. (Vi ser bort fra G's kantvægte i denne opgave.)

1. Besvar følgende sand/falsk opgaver.

G har en Euler kreds	☐ Sand	☒ Falsk
G har en Euler vej	☐ Sand	☒ Falsk
G har en Hamilton kreds	☒ Sand	☐ Falsk

2. Hvad er graden (degree) af punktet b ?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

3. Hvad er længden af en korteste simpel kreds i G?

☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

procedure *Dijkstra*(G: weighted connected simple graph, with
    all weights positive)
{G has vertices $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ and lengths $w(v_i, v_j)$
    where $w(v_i, v_j) = \infty$ if $\{v_i, v_j\}$ is not an edge in G}
for $i := 1$ **to** n
    $L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all
    other labels are ∞, and S is the empty set}
while $z \notin S$
    $u :=$ a vertex not in S with $L(u)$ minimal
    $S := S \cup \{u\}$
    for all vertices v not in S
        if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u, v)$
        {this adds a vertex to S with minimal label and updates the
        labels of vertices not in S}
return $L(z)$ {$L(z) =$ length of a shortest path from a to z}

Figur 2: