Facit

Reeksamen i Calculus

Tirsdag den 18. august 2015

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. Del II **skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer** desuden siderne og angiv **antallet af afleverede ark** på 1. side af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

Betragt den plane kurve givet ved

$$x = t^3 + 1,$$
$$y = 4t - 1,$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

(a) Find kurvens krumning $\kappa(t)$ for $t \in \mathbb{R}$.

$$\kappa(t) = \frac{24t}{(9t^4+16)^{3/2}}$$

(b) Eftervis at punktet $P = (2,3)$ ligger på kurven, og beregn krumningen af kurven i dette punkt.

$$t^3+1=2 \wedge 4t-1=3 \Leftrightarrow t^3=1 \wedge t=1 \Leftrightarrow t=1$$

$$\kappa(1) = \frac{24}{125}$$

Opgave 2 (10%)

(a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t}$$

(b) Løs begyndelsesværdiproblemet

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

$$y(t) = e^{-2t} + 2e^{t}$$

Opgave 3 (7%)

Bestem Taylorpolynomiet af 4. grad for funktionen

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

$$2 + x^2 + \frac{1}{12}x^4$$

Opgave 4 (8%)

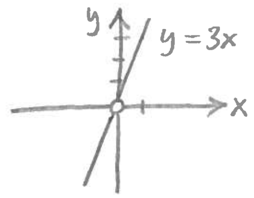
Betragt funktionen

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}.$$

(a) Angiv definitionsmængden for f.

$\{(x,y): \ x \neq y\}$

(b) Skitser niveaukurven givet ved ligningen $f(x,y) = -2$.



Opgave 5 (12%)

En funktion er defineret som

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 2).$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x,y)$.

$\frac{2}{x^2+y^2+2} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j})$

(b) Beregn den retningsafledede af f i punktet $P = (1,-1)$ og retningen givet ved

$$\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

$-\frac{1}{10}$

(c) Find et kritisk punkt for funktionen f.

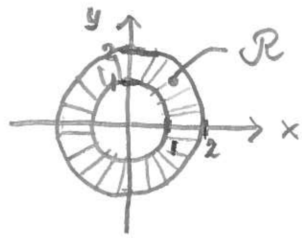
$(0,0)$

Opgave 6 (12%)

Et område i planen er givet ved

$$\mathscr{R} = \{(x,y) : \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

(a) Skitser området $\mathscr{R}$.



(b) Beregn planintegralet

$$\iint_{\mathscr{R}} \sqrt{x^2+y^2}\, dA.$$

$\frac{14}{3}\pi$

Opgave 7 (7%)

Find samtlige komplekse rødder i polynomiet

$$z^2 - 3z + 3 - i.$$

$2+i$, $1-i$

Opgave 8 (8%)

En flade $\mathscr{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen

$$z = \arctan(x - y).$$

$\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$
$= \arctan(2-1)$ OK

(a) Godtgør at punktet $P = (2, 1, \frac{\pi}{4})$ ligger på fladen $\mathscr{F}$.

(b) Find en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ i punktet $P = (2, 1, \frac{\pi}{4})$.

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2}(y-1)$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. For ethvert komplekst tal z gælder der

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z).$$

☒ Sand ☐ Falsk

b. Der gælder, at

$$\sin(2x) = 2\sin(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

☐ Sand ☒ Falsk

c. Lad $f(x, y)$ være en funktion defineret på $\mathbb{R}^2$. Hvis $f_x(a, b) = 0$ og $f_y(a, b) = 0$, så antager $f(x, y)$ lokalt maksimum eller lokalt minimum i punktet (a, b).

☐ Sand ☒ Falsk

d. Hvis x er et reelt tal, og $\tan(x) \neq 0$, så er

$$\tan(x)\arctan(x) = 1.$$

☐ Sand ☒ Falsk

e. Der gælder at

$$e^{2\pi i} = 1.$$

☒ Sand ☐ Falsk

Bemærkning. I opgaverne 10 og 11 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 10 (7%)

Et legeme $\mathcal{T}$ dækker præcis området i rummet givet ved

$$\{(x, y, z): \quad (x, y) \in \mathcal{R}, \quad y \le z \le 2y\}$$

hvor

$$\mathcal{R} = \{(x, y): \quad -1 \le x \le 1, \quad x^2 + 1 \le y \le 2\}.$$

Massetætheden (densiteten) for $\mathcal{T}$ er $\delta(x, y, z) = z$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor. Bemærk: Integralerne skal **ikke** evalueres.

- [ ] $\mathcal{T}$'s masse kan udregnes som følger: $m = \int_{-1}^{1}\int_{x^2+1}^{2}\int_{y}^{2y} z\,dz\,dx\,dy$.
- [x] $\mathcal{T}$'s masse kan udregnes som følger: $m = \int_{-1}^{1}\int_{x^2+1}^{2}\int_{y}^{2y} z\,dz\,dy\,dx$.
- [ ] $\mathcal{T}$'s volumen kan udregnes som følger: $V = \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{y}^{2y} dz\,dx\,dy$.
- [x] $\mathcal{T}$'s volumen kan udregnes som følger: $V = \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}\int_{y}^{2y} dz\,dx\,dy$.
- [x] $\mathcal{T}$'s volumen kan udregnes som følger: $V = \int_{-1}^{1}\int_{x^2+1}^{2}\int_{y}^{2y} dz\,dy\,dx$.

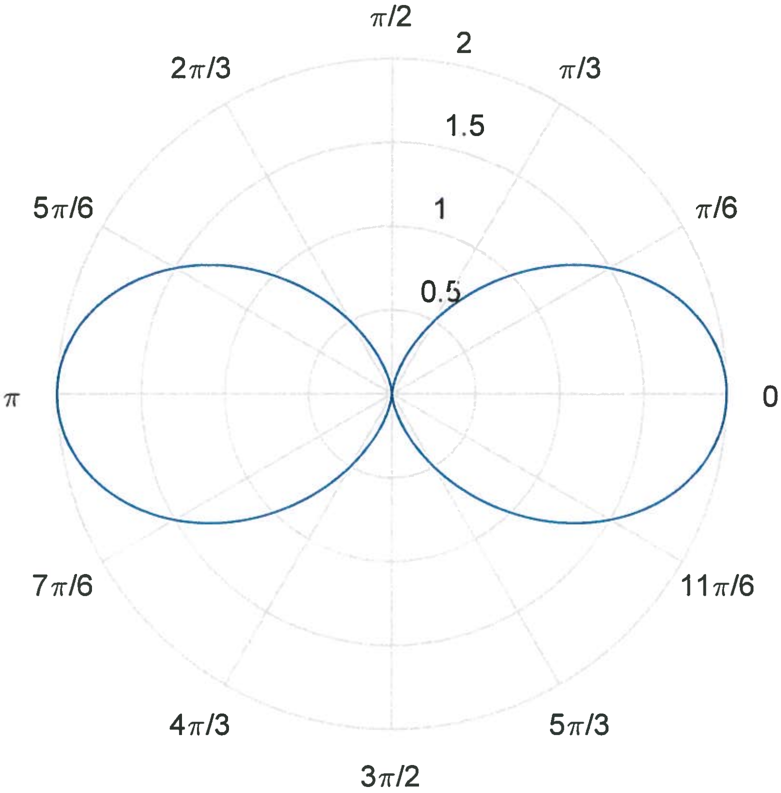
Opgave 11 (6%)

Lad $p(z)$ være et komplekst polynomium af grad 7. Det oplyses, at $p(z)$ har reelle koefficienter. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- [x] $p(z)$ vil altid have 7 komplekse rødder regnet med multiplicitet.
- [x] Der findes altid et 1. grads polynomium $q_1(z)$ med reelle koefficienter og et 6. grads polynomium $q_2(z)$, således at $p(z) = q_1(z)q_2(z)$.
- [ ] Hvis $z_0 \neq 0$ er en kompleks rod i $p(z)$, så er z_0^{-1} også en kompleks rod i $p(z)$.
- [ ] $p(z)$ vil altid have 7 reelle rødder regnet med multiplicitet.
- [x] $p(z)$ vil altid have mindst én reel rod.

Opgave 12 (5%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f med tilhørende definitionsmængde for θ svarer til ovenstående figur?

- ☐ $f(\theta) = 2 - \cos(3\theta),\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☒ $f(\theta) = 1 + \cos(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 - \sin(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$