

Reeksamen i Calculus

Torsdag den 11. august 2011

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver. Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.** God arbejdslyst!

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

- HOLD NUMMER: Hold 3 (v. Jacob Broe)
 Hold 4 (v. Morten Nielsen)
 Hold 5 (v. Bo Rosbjerg)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

Området T er i rummet afgrænset af fladerne $z = (x^2 + y^2)^2$ og $z = 1$.

- Bestem volumen af T [vink: cylinderkoordinater]. $V = \frac{2\pi}{3}$

Opgave 2 (8%)

Der er givet en funktion $f(x)$ med den egenskab, at dens Taylorpolynomium af 3. grad med udviklingspunkt $a = 0$ er

$$P_3(x) = 2 - x + 3x^2 - x^3.$$

- (a) Bestem værdien $f(0)$. $f(0) = 2$
- (b) Bestem værdien $f'(0)$. $f'(0) = -1$
- (c) Bestem værdien $f''(0)$. $f''(0) = 6$

Opgave 3 (8%)

Betragt

$$f(x, y) = x^3y - 2xy^2.$$

- (a) Bestem den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ $f_x(x, y) = 3x^2y - 2y^2$
(b) Bestem den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ $f_y(x, y) = x^3 - 4xy$
(c) Bestem en ligning for tangentplanen til fladen $z = f(x, y)$ gennem punktet $(1, 1, -1)$.

$$z = x - 3y + 1$$

Opgave 4 (10%)

Beregn planintegralet af $f(x, y) = x^2 + y^2$ over området

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

$$\frac{15}{2} \pi$$

Opgave 5 (7%)

Løs den binome ligning

$$z^3 = 8,$$

hvor løsningerne skal angives på formen $a + ib$, med $a, b \in \mathbb{R}$.

$$z = 2 \quad \vee \quad z = -1 + i\sqrt{3} \quad \vee \quad z = -1 - i\sqrt{3}$$

Opgave 6 (8%)

Der er givet et komplekst tal $z = 1 + i$.

- (a) Bestem modulus af z^4 . $\text{modulus} = 4$
(b) Bestem modulus af z^{-4} . $\text{modulus} = \frac{1}{4}$
(c) Skriv det komplekse tal z^4 på polær form. $z^4 = 4e^{i\pi}$

Opgave 7 (8%)

Betragt funktionen

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

- (a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x, y, z)$.
(b) Bestem den retningsafledede af f i punktet $P(1, 1, 1)$ i retningen givet ved $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$$

$$\text{Retningsafledede} = \frac{13}{\sqrt{17}} = \frac{13}{17} \sqrt{17}$$

Opgave 8 (12%)

- (a) Find den fuldstændige løsning til differentiallygningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0. \quad y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$$

- (b) Find den fuldstændige løsning til differentiallygningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x + 1. \quad y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Bemærkning. I opgaverne 9 og 10 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtigt afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 9 (7%)

Betragt et komplekst polynomium $p(z)$ af grad 5 med *reelle koefficienter*. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- Der findes et $a \in \mathbb{R}$, således at $p(z)$ kan skrives $p(z) = (z - a)q(z)$, hvor $q(z)$ er et polynomium af grad 4.
- $q(z)$ kan *altid* faktoriseres som et produkt udelukkende bestående af 1. og 2. grads polynomier med reelle koefficienter
- $q(z)$ indeholder altid mindst én lineær reel faktor
- $q(z)$ har altid 5 forskellige komplekse rødder
- $q(z)$ kan faktoriseres udelukkende ved brug af 1. ordens polynomier med reelle koefficienter
- $p(z)$ har muligvis ingen rødder i den komplekse plan.

Opgave 10 (7%)

Betragt en funktion $f(x, y)$ af to variable defineret på \mathbb{R}^2 . Det oplyses at de partielle afledede f_x og f_y eksisterer og er kontinuerte i en omegn af punktet $P(a, b)$. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

f er kontinuert i $P(a, b)$.

Samtlige retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ eksisterer.

Der gælder altid, at

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = 0.$$

f er differentiabel i $P(a, b)$.

Der gælder ikke nødvendigvis, at $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Opgave 11 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

- a. For to komplekse tal $z_1 = a_1 + ib_1$ og $z_2 = a_2 + ib_2$, med $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, gælder altid, at

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Sand

Falsk

- b. Der gælder, at

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \text{for alle } x \in [0, \pi].$$

Sand

Falsk

- c. Lad a, b og c være reelle konstanter. Så har differentialligningen

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = x^3,$$

præcis én løsning.

Sand

Falsk

- d. Funktionen $f(x, y, z)$ er defineret på \mathbb{R}^3 , og alle retningsafledede for f eksisterer i punktet $P(0, 0, -3)$. Så eksisterer samtlige partielle afledede af 1. orden af f i $P(0, 0, -3)$.

Sand

Falsk

- e. Et komplekst polynomium af grad n , $n \geq 1$, har præcis n forskellige komplekse rødder.

Sand

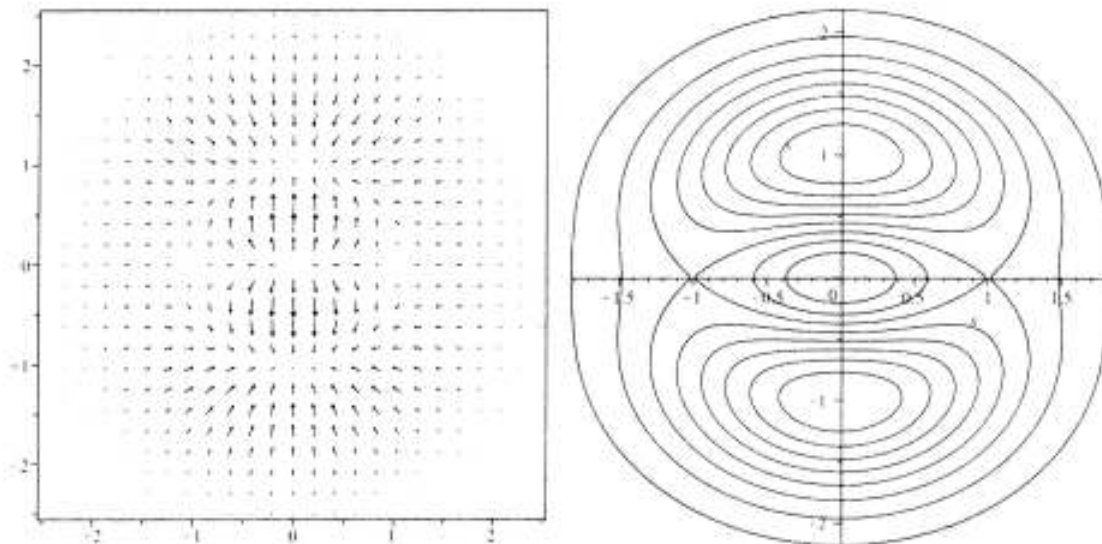
Falsk

Opgave 12 (6%)

En funktion $f(x, y)$ er defineret på kvadratet

$$R = \{(x, y) : -5/2 \leq x, y \leq 5/2\}.$$

De to figurer nedenfor viser hhv. udvalgte gradientvektorer og niveaukurver for funktionen i dette kvadrat. Funktionen har tre kritiske punkter i R , med koordinaterne $(0, 0)$ og $(0, \pm 1)$. Afgør ud fra plottene typen af hver af de kritiske punkter, og markér svaret nedenfor.



(a) I punktet $(0, 0)$ har f et:

- lokalt maksimum
- lokalt minimum
- saddepunkt.

(b) I punktet $(0, -1)$ har f et:

- lokalt maksimum
- lokalt minimum
- saddepunkt.

(c) I punktet $(0, 1)$ har f et:

- lokalt maksimum
- lokalt minimum
- saddepunkt.