Facit

Eksamen i Calculus

Fredag den 8. januar 2016

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt, de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. Del II **skal afkrydses i nærværende opgavesæt**.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer** desuden siderne, og angiv **antallet af afleverede ark** på side 1 af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________

STUDIENUMMER: ______________________

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

En partikel bevæger sig langs en kurve i rummet. Partiklens koordinater til tiden t er givet ved

$$x = 4t + 1,$$
$$y = \cos(3t),$$
$$z = \sin(3t).$$

(a) Bestem kurvens buelængde fra $t = 0$ til $t = 4$.

20

(b) Find accelerationsvektoren for partiklen.

$$\vec{a}(t) = -9 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{bmatrix}$$

Opgave 2 (6%)

Lad $f(x)$ være en funktion der er tre gange differentiabel i $x = 0$. Taylorpolynomiet af grad 3 for $f(x)$ med udviklingspunkt $a = 0$ er

$$P_3(x) = 2 - 7x + x^3.$$

Bestem værdierne $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ og $f'''(0)$.

2, −7, 0, 6

Opgave 3 (10%)

(a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

$$y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(t) + c_2 e^{-2t} \sin(t)$$

(b) Løs begyndelsesværdiproblemet

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

$$y(t) = 3e^{-2t} \sin(t)$$

Opgave 4 (8%)

Betragt funktionen

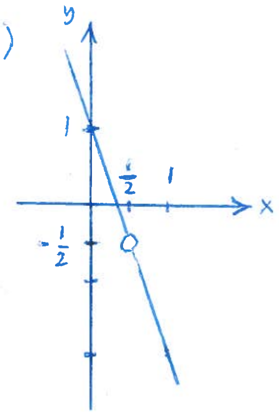
$$f(x,y) = \frac{5x+3y-1}{x+y}.$$

(a) Angiv definitionsmængden for f.

(b) Skitser niveaukurven givet ved ligningen $f(x,y) = 2$.

(a) $Dm(f) = \{(x,y) \mid y \neq -x\}$

(b)



Opgave 5 (12%)

En funktion er defineret som

$$f(x,y) = xe^y.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x,y)$.

$\nabla f(x,y) = e^y \vec{i} + xe^y \vec{j}$

(b) Beregn den retningsafledede af f i punktet $P = (1,0)$ og retningen givet ved

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}.$$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(c) I hvilken retning er den retningsafledede i punktet $P = (1,0)$ størst? (Angiv en enhedsvektor). I hvilken retning er den retningsafledede i punktet P mindst?

$\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

Opgave 6 (9%)

Fladen $\mathscr{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x,y,z) = 0$, hvor

$$F(x,y,z) = x^2 + \sin(xy) + 4z.$$

(a) Godtgør, at punktet $P = (2,0,-1)$ ligger på fladen $\mathscr{F}$.

(b) Bestem de partielle afledede $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ og $\frac{\partial F}{\partial z}$.

(c) Find en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ i punktet $P = (2,0,-1)$.

(a) $2^2 + \sin(2\cdot 0) + 4\cdot(-1) = 0$ OK

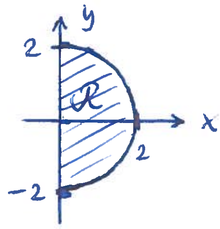
(b) $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y\cos(xy)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x\cos(xy)$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 4$

(c) $2x + y + 2z = 2$

Opgave 7 (12%)

Lad $\mathscr{R}$ være området i planen bestående af de punkter (x, y), som opfylder ulighederne

$$0 \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$



(a) Skitser området $\mathscr{R}$.

(b) Beregn planintegralet

$$\iint_{\mathscr{R}} e^{x^2+y^2}\, dA.$$

$\frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$

Opgave 8 (7%)

Find de komplekse rødder i polynomiet

$$z^2 + (-3 + i)z + 4 - 3i.$$

$2+i$, $1-2i$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. Punktet med rektangulære koordinater $(x, y) = (1, 1)$ kan i polære koordinater angives ved $(r, \theta) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

☒ Sand ☐ Falsk

b. Der gælder at

$$e^{3\pi i} = -3.$$

☐ Sand ☒ Falsk

c. Funktionen

$$f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$$

antager globalt maksimum i punktet $(0, 0)$.

☐ Sand ☒ Falsk

d. Der gælder at

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

☒ Sand ☐ Falsk

e. For ethvert reelt tal θ gælder der

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta.$$

☒ Sand ☐ Falsk

Bemærkning. I opgaverne 10 og 11 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 10 (6%)

Lad $\mathscr{T}$ være området i rummet bestående af de punkter (x, y, z), som opfylder ulighederne

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad -y \leq z \leq y.$$

Et legeme med massetætheden (densiteten) $\delta(x, y, z) = 2 - y^2$ dækker netop dette område. Legemets volumen (rumfang) betegnes V, og legemets masse betegnes m. Markér samtlige korrekte formler nedenfor. Bemærk: Du skal **ikke** beregne integralerne.

- [x] $V = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-y}^{y} dz dy dx.$
- [x] $V = \int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-y}^{y} dz dx dy.$
- [ ] $V = \int_{-y}^{y} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{1} dx dy dz.$
- [ ] $m = \int_{-y}^{y} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{1} (2 - y^2)\, dx dy dz.$
- [x] $m = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-y}^{y} (2 - y^2)\, dz dy dx.$

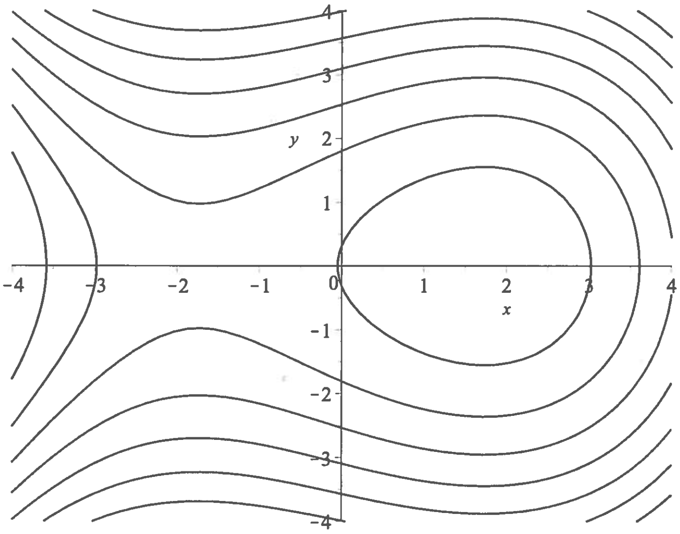
Opgave 11 (6%)

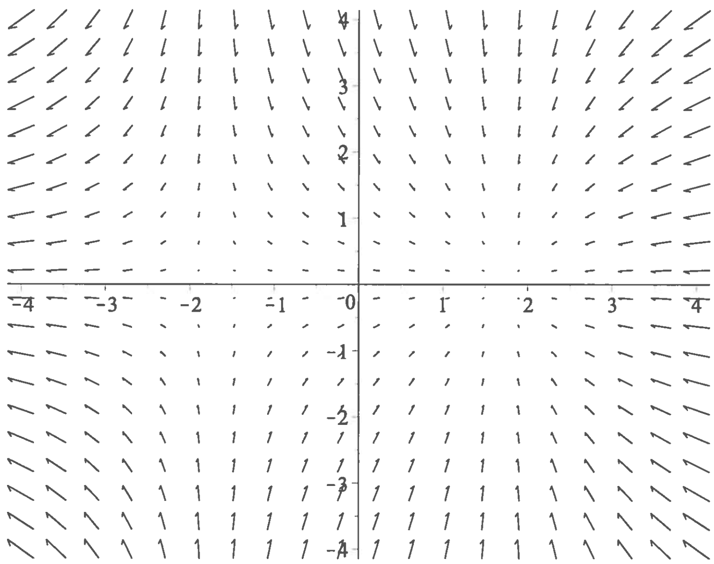
Lad $p(z)$ være et komplekst polynomium af grad 9. Det oplyses, at $p(z)$ har reelle koefficienter. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- [x] $p(z)$ vil altid have mindst én reel rod.
- [ ] $p(z)$ vil altid have mindst to reelle rødder.
- [x] $p(z)$ har præcis 9 rødder regnet med multiplicitet.
- [x] Hvis z_0 er en rod i $p(z)$ så er $\overline{z}_0$ også en rod i $p(z)$.
- [ ] $p(z)$ vil altid have 9 forskellige rødder.

Opgave 12 (6%)

En differentiabel funktion $f(x, y)$ er defineret for $-4 \leq x \leq 4$ og $-4 \leq y \leq 4$. De to figurer herunder viser udvalgte niveaukurver samt gradientvektorer for funktionen. Der er netop to kritiske punkter med koordinaterne $(-\sqrt{3}, 0)$ og $(\sqrt{3}, 0)$. Afgør typen af hvert kritisk punkt, og markér svaret nedenfor.





a. I punktet $(-\sqrt{3}, 0)$ har f et

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☒ saddelpunkt

b. I punktet $(\sqrt{3}, 0)$ har f et

- ☒ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt