Eksamen i Calculus

Mandag den 8. juni 2015

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver”. I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice” opgaver. Del II **skal afkrydses i nærværende opgavesæt**.

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer** desuden siderne og angiv **antallet af afleverede ark** på 1. side af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

Betragt den plane kurve givet ved

$$x = t^2,$$
$$y = 2t + 1,$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

(a) Find kurvens krumning $\kappa(t)$ for $t \in \mathbb{R}$.

(b) Eftervis at punktet $P = (0, 1)$ ligger på kurven, og beregn krumningen af kurven i dette punkt.

Opgave 2 (10%)

(a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

(b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' + 10y = -13e^{3t}.$$

Opgave 3 (7%)

Bestem Taylorpolynomiet af 2. grad for funktionen

$$f(x) = 2 + x^2 + \arctan(x)$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

Opgave 4 (8%)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

(a) Angiv definitionsmængden for f.

(b) Skitser niveaukurven givet ved ligningen $f(x,y)=1$.

Opgave 5 (12%)

En funktion er defineret som

$$f(x,y) = x\sin(y) - y.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x,y)$.

(b) Beregn den retningsafledede af f i punktet $P=(1,\frac{\pi}{2})$ og retningen givet ved

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}.$$

(c) I hvilken retning er den retningsafledede i punktet $P=(1,\frac{\pi}{2})$ størst mulig? (Angiv en enhedsvektor). Hvad er størsteværdien af den retningsafledede i dette punkt?

Opgave 6 (12%)

Et område i planen er givet ved

$$\mathscr{R} = \left\{(x,y): \quad 0 \le x \le 1, \quad x^2-1 \le y \le -x+2\right\}.$$

(a) Skitser området $\mathscr{R}$.

(b) Beregn planintegralet

$$\iint_{\mathscr{R}} 2xy\,dA.$$

Opgave 7 (7%)

Find samtlige komplekse rødder i polynomiet

$$z^2 + (1-4i)z - 3 - 3i.$$

Opgave 8 (8%)

Fladen $\mathscr{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = xy^2 + e^y - xz^3.$$

(a) Godtgør at punktet $P = (1, 0, 1)$ ligger på fladen $\mathscr{F}$.

(b) Find en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ i punktet $P = (1, 0, 1)$.

Del II ("multiple choice” opgaver)

Opgave 9 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. Der gælder, at

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) + \cos(\beta)$$

for alle $\alpha \in \mathbb{R}$ og $\beta \in \mathbb{R}$.

☐ Sand ☐ Falsk

b. For funktionen $f(t) = e^{(1-i)t}$, hvor $t \in \mathbb{R}$, gælder at

$$f'(t) = (1-i)e^{(1-i)t}.$$

☐ Sand ☐ Falsk

c. Lad $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, og lad f være funktionen med forskrift

$$f(x, y) = x^3 y + \cos(2x)$$

og definitionsmængde D. Da antager f globalt maksimum på D.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Der gælder at

$$e^{6\pi i} = -1.$$

☐ Sand ☐ Falsk

e. For ethvert komplekst tal $z \neq 0$ gælder der

$$\frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1.$$

☐ Sand ☐ Falsk

Bemærkning. I opgaverne 10 og 11 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 10 (7%)

Et legeme $\mathscr{T}$ dækker præcis området i rummet givet ved

$$\{(x, y, z) : \quad (x, y) \in \mathscr{R}, \quad -x \leq z \leq y^2 + 3x\}$$

hvor

$$\mathscr{R} = \{(x, y) : \quad -2 \leq y \leq 2, \quad y^2 \leq x \leq 4\}.$$

Massetætheden (densiteten) for $\mathscr{T}$ er $\delta(x, y, z) = 2x + z^2$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor. Bemærk: Integralerne skal **ikke** evalueres.

- ☐ $\mathscr{T}$'s masse kan udregnes som følger: $m = \int_{y^2}^{4} \int_{-2}^{2} \int_{-x}^{y^2+3x} (2x + z^2)\, dz dy dx.$
- ☐ $\mathscr{T}$'s masse kan udregnes som følger: $m = \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} \int_{-x}^{y^2+3x} (2x + z^2)\, dz dx dy.$
- ☐ $\mathscr{T}$'s masse kan udregnes som følger: $m = \int_{0}^{4} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \int_{-x}^{y^2+3x} (2x + z^2)\, dz dy dx.$
- ☐ $\mathscr{T}$'s volumen kan udregnes som følger: $V = \int_{y^2}^{4} \int_{-2}^{2} \int_{-x}^{2x+z^2} dz dy dx.$
- ☐ $\mathscr{T}$'s volumen kan udregnes som følger: $V = \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} \int_{-x}^{y^2+3x} dz dx dy.$

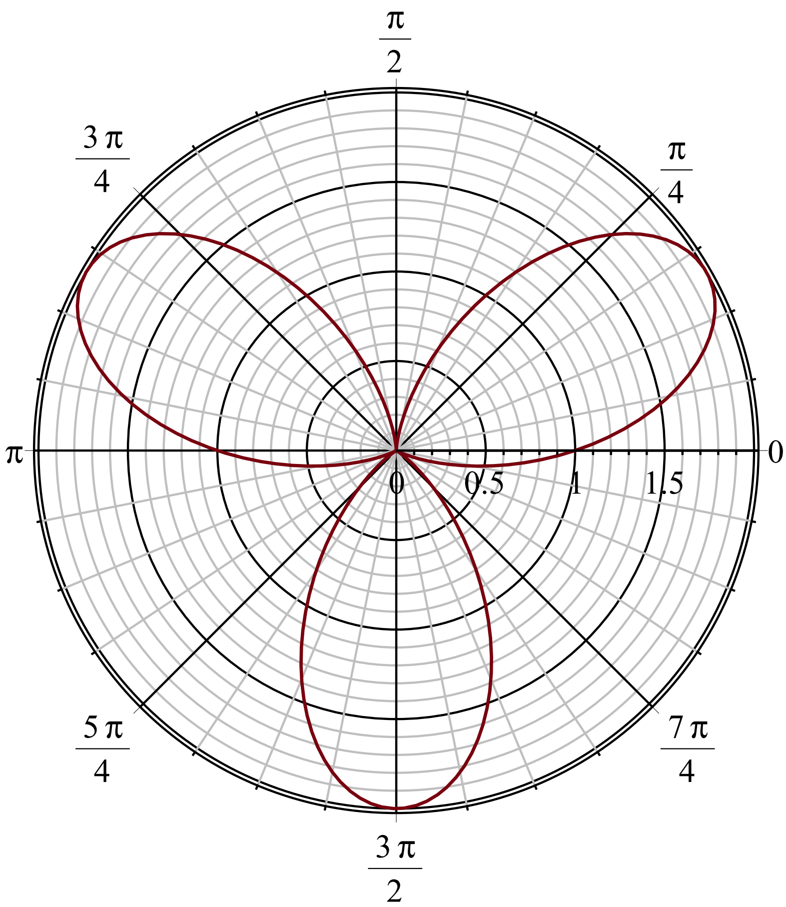
Opgave 11 (6%)

Lad $p(z)$ være et komplekst polynomium af grad 6. Det oplyses, at $p(z)$ har reelle koefficienter. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- ☐ $p(z)$ vil altid have 6 forskellige komplekse rødder.
- ☐ $p(z)$ vil altid have mindst én reel rod.
- ☐ Der findes altid et 2. grads polynomium $q_1(z)$ med reelle koefficienter og et 4. grads polynomium $q_2(z)$, således at $p(z) = q_1(z) q_2(z)$.
- ☐ $p(z)$ vil altid have 6 komplekse rødder regnet med multiplicitet.

Opgave 12 (5%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f med tilhørende definitionsmængde for θ svarer til ovenstående figur?

- ☐ $f(\theta) = 2 - \cos(3\theta),\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(6\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(3\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(6\theta),\ 0 \le \theta \le \pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(3\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 - \sin(3\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$