Facit

Eksamen i Calculus

Mandag den 8. juni 2015

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes **elektroniske hjælpemidler**.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet består af to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. Del II **skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer** desuden siderne og angiv **antallet af afleverede ark** på 1. side af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (8%)

Betragt den plane kurve givet ved

$$x = t^2,$$
$$y = 2t + 1,$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

(a) Find kurvens krumning $\kappa(t)$ for $t \in \mathbb{R}$.

$\kappa(t) = \dfrac{1}{2(t^2+1)^{3/2}}$

(b) Eftervis at punktet $P = (0, 1)$ ligger på kurven, og beregn krumningen af kurven i dette punkt.

$(t^2, 2t+1) = (0,1) \Leftrightarrow t = 0$

$\kappa(0) = \dfrac{1}{2}$

Opgave 2 (10%)

$y(t) = c_1 e^t \cos(3t) + c_2 e^t \sin(3t)$

(a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

(b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' + 10y = -13e^{3t}.$$

$y(t) = -e^{3t} + c_1 e^t \cos(3t) + c_2 e^t \sin(3t)$

Opgave 3 (7%)

Bestem Taylorpolynomiet af 2. grad for funktionen

$$f(x) = 2 + x^2 + \arctan(x)$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

$2 + x + x^2$

Opgave 4 (8%)

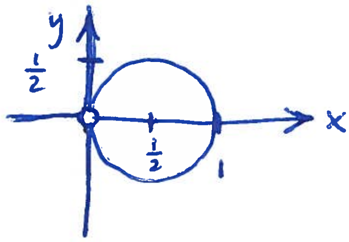
Betragt funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

(a) Angiv definitionsmængden for f.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(b) Skitser niveaukurven givet ved ligningen $f(x,y) = 1$.



Opgave 5 (12%)

En funktion er defineret som

$$f(x,y) = x\sin(y) - y.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x,y)$.

$\nabla f(x,y) = (\sin(y), x\cos(y) - 1)$

(b) Beregn den retningsafledede af f i punktet $P = (1, \frac{\pi}{2})$ og retningen givet ved

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}.$$

0

(c) I hvilken retning er den retningsafledede i punktet $P = (1, \frac{\pi}{2})$ størst mulig? (Angiv en enhedsvektor). Hvad er størsteværdien af den retningsafledede i dette punkt?

$\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$,

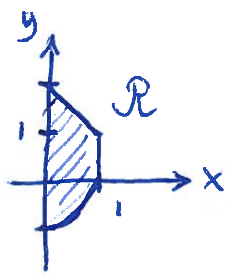
$\sqrt{2}$

Opgave 6 (12%)

Et område i planen er givet ved

$$\mathscr{R} = \{(x,y) : \quad 0 \le x \le 1, \quad x^2 - 1 \le y \le -x + 2\}.$$

(a) Skitser området $\mathscr{R}$.



(b) Beregn planintegralet

$$\iint_{\mathscr{R}} 2xy\, dA.$$

$\frac{3}{4}$

Opgave 7 (7%)

Find samtlige komplekse rødder i polynomiet

$$z^2 + (1-4i)z - 3 - 3i.$$

$3i \ , \quad -1+i$

Opgave 8 (8%)

Fladen $\mathscr{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen $F(x, y, z) = 0$, hvor

$$F(x, y, z) = xy^2 + e^y - xz^3.$$

(a) Godtgør at punktet $P = (1, 0, 1)$ ligger på fladen $\mathscr{F}$.

$F(1,0,1) = 1\cdot 0^2 + e^0 - 1\cdot 1^3 = 0$

OK

(b) Find en ligning for tangentplanen til $\mathscr{F}$ i punktet $P = (1, 0, 1)$.

$x - y + 3z = 4$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. Der gælder, at

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)+\cos(\beta)$$

for alle $\alpha\in\mathbb{R}$ og $\beta\in\mathbb{R}$.

☐ Sand ☒ Falsk

b. For funktionen $f(t)=e^{(1-i)t}$, hvor $t\in\mathbb{R}$, gælder at

$$f'(t)=(1-i)e^{(1-i)t}.$$

☒ Sand ☐ Falsk

c. Lad $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$, og lad f være funktionen med forskrift

$$f(x,y)=x^3y+\cos(2x)$$

og definitionsmængde D. Da antager f globalt maksimum på D.

☒ Sand ☐ Falsk

d. Der gælder at

$$e^{6\pi i}=-1.$$

☐ Sand ☒ Falsk

e. For ethvert komplekst tal $z\neq 0$ gælder der

$$\frac{z\bar{z}}{|z|^2}=1.$$

☒ Sand ☐ Falsk

Bemærkning. I opgaverne 10 og 11 evalueres der efter følgende princip: Hver forkert afkrydsning ophæver én rigtig afkrydsning.

Opgave 10 (7%)

Et legeme $\mathscr{T}$ dækker præcis området i rummet givet ved

$$\{(x, y, z): \quad (x, y) \in \mathscr{R}, \quad -x \leq z \leq y^2 + 3x\}$$

hvor

$$\mathscr{R} = \{(x, y): \quad -2 \leq y \leq 2, \quad y^2 \leq x \leq 4\}.$$

Massetætheden (densiteten) for $\mathscr{T}$ er $\delta(x, y, z) = 2x + z^2$. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor. Bemærk: Integralerne skal **ikke** evalueres.

☐ $\mathscr{T}$'s masse kan udregnes som følger: $m = \int_{y^2}^{4} \int_{-2}^{2} \int_{-x}^{y^2+3x} (2x + z^2)\, dz dy dx.$

☒ $\mathscr{T}$'s masse kan udregnes som følger: $m = \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} \int_{-x}^{y^2+3x} (2x + z^2)\, dz dx dy.$

☒ $\mathscr{T}$'s masse kan udregnes som følger: $m = \int_{0}^{4} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \int_{-x}^{y^2+3x} (2x + z^2)\, dz dy dx.$

☐ $\mathscr{T}$'s volumen kan udregnes som følger: $V = \int_{y^2}^{4} \int_{-2}^{2} \int_{-x}^{2x+z^2} dz dy dx.$

☒ $\mathscr{T}$'s volumen kan udregnes som følger: $V = \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} \int_{-x}^{y^2+3x} dz dx dy.$

Opgave 11 (6%)

Lad $p(z)$ være et komplekst polynomium af grad 6. Det oplyses, at $p(z)$ har reelle koefficienter. Markér samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☐ $p(z)$ vil altid have 6 forskellige komplekse rødder.

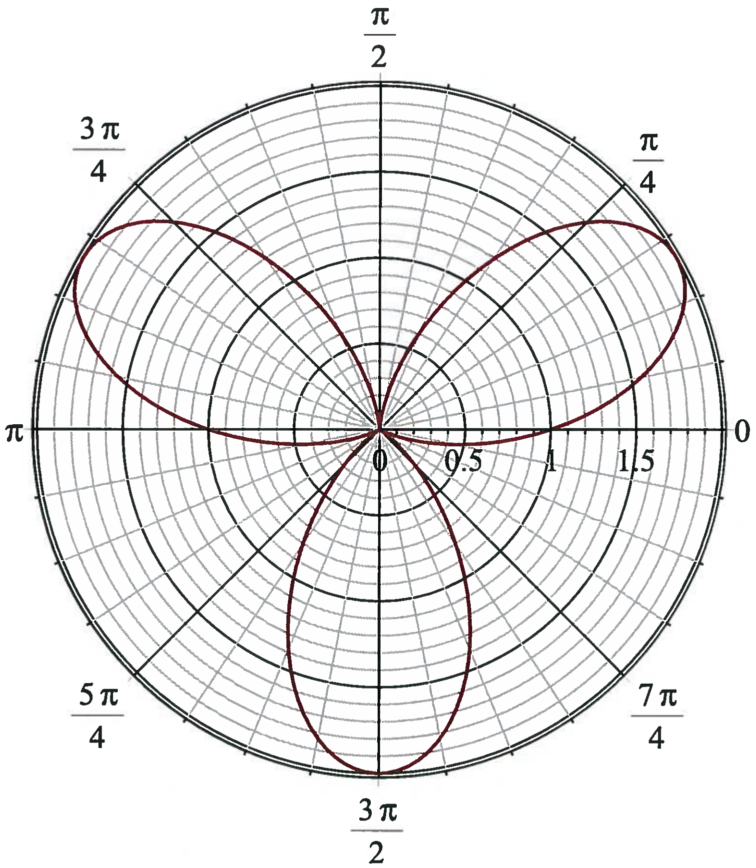
☐ $p(z)$ vil altid have mindst én reel rod.

☒ Der findes altid et 2. grads polynomium $q_1(z)$ med reelle koefficienter og et 4. grads polynomium $q_2(z)$, således at $p(z) = q_1(z) q_2(z)$.

☒ $p(z)$ vil altid have 6 komplekse rødder regnet med multiplicitet.

Opgave 12 (5%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken af nedenstående forskrifter for f med tilhørende definitionsmængde for θ svarer til ovenstående figur?

- ☐ $f(\theta) = 2 - \cos(3\theta),\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(6\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(3\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 1 + \sin(6\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$
- ☒ $f(\theta) = 1 + \sin(3\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 - \sin(3\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$